



TUGAS AKHIR - SM141501

ALIRAN KONVEKSI CAMPURAN DARI FLUIDA VISKOELASTIS YANG MELEWATI SILINDER TERIRIS

**AMRINA ROSYADAH
NRP 1212 100 049**

**Dosen Pembimbing I
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
Dosen Pembimbing II
Dr. Chairul Imron, M.I. Komp**

**JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016**



FINAL PROJECT - SM141501

MIXED CONVECTION FLOW FROM VISCOELASTIC FLUID THROUGH SLICED CYLINDER

**AMRINA ROSYADAH
NRP 1212 100 049**

**Supervisor I
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
Supervisor II
Dr. Chairul Imron, M.I. Komp**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty Of Mathematics And Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute Of Technology
Surabaya 2016**

LEMBAR PENGESAHAN

ALIRAN KONVEKSI CAMPURAN DARI FLUIDA VISKOELASTIS YANG MELEWATI SILINDER TERIRIS ***MIXED CONVECTION FLOW FROM VISCOELASTIC FLUID THROUGH SLICED CYLINDER***

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Bidang Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
AMRINA ROSYADAH
NRP. 1212 100 049

Surabaya, Juni 2016
Menyetujui,

Dosen Pembimbing II

Dosen Pembimbing I

Dr. Chairul Imron, M.Ikom
NIP. 19611115 198703 1 003

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
NIP. 19650605 198903 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Dr. Imam Muklash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

MIXED CONVECTION FLOW FROM VISCOELASTIC FLUID THROUGH SLICED CYLINDER

Name : Amrina Rosyadah
NRP : 1212100049
Supervisors : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

ABSTRACT

Convection is heat transfer from one place to another cause by fluid movement. mixed convection flow is a combination of free convection and forced convection. Describe about steady flow in the boundary layer and convective heat transfer from mixed convection flow from viscoelstic fluid through sliced cylinder. The fluid flow influence by viscoelastic causing the boundary layer. From boundary layer we get dimensional governing equation consists of continuity equation, momentum equation and energy equation. Furthermore, dimensional governing equation transformed into a non-dimensional equation and then transformed into similiarity equation. Similiarity equations solved numerically using Keller-Box method. In this final project discuss about mathematical modeling and analysis of mixed convection flow of viscoelastic fluid through the sliced cylinder at steady incompressible. Study about effect of mixed convection parameter, viscoelastic parameter, Prandtl number and wedge angle variation. Numerical simulations indicate that the velocity profile increasing and temperature profile decreasing with increasing parameter values mixed convection. Velocity profile decreasing and temperature profile increasing with increasing viskoselatic parameter. Velocity and temperature profile decreasing with increasing Prandtl numbers. The velocity profile increasing and temperature profile decreasing with increasing variations sliced angle.

Keywords: Mixed convection flow, viscoelastic fluid, Keller-Box method

ALIRAN KONVEKSI CAMPURAN DARI FLUIDA VISKOELASTIS YANG MELEWATI SILINDER TERIRIS

Nama Mahasiswa : Amrina Rosyadah
NRP : 1212100049
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

ABSTRAK

Konveksi merupakan perpindahan panas dari satu tempat ke tempat lain yang disebabkan oleh pergerakan fluida. Aliran konveksi campuran merupakan perpaduan dari konveksi bebas dan konveksi paksa. Tugas akhir ini menjelaskan tentang aliran steady pada lapisan batas dan perpindahan panas dari aliran konveksi campuran dari fluida viskoelastis yang melewati silinder teriris. Aliran fluida viskoelastis tersebut menimbulkan lapisan batas (Boundary layer). Dari lapisan batas tersebut dibentuk persamaan pembangun dimensional. Persamaan pembangun dimensional yang terbentuk yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi. Selanjutnya persamaan tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk non-dimensional dan kemudian ditransformasikan menjadi persamaan similiaritas. Persamaan similiaritas diselesaikan secara numerik menggunakan metode Keller-Box. pada Tugas akhir ini dipelajari mengenai pengaruh dari parameter konveksi campuran, viskoelastis, bilangan Prandtl dan variasi sudut irisan. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa Profil kecepatan meningkat dan profil temperatur menurun dengan bertambahnya nilai parameter konveksi campuran. Profil kecepatan semakin menurun dan profil temperatur meningkat dengan bertambahnya parameter viskoselastis. Kecepatan dan temperatur menurun

dengan bilangan Prandtl yang semakin besar. Sedangkan kecepatan meningkat dan temperatur menurun dengan bertambahnya variasi sudut irisan.

Kata Kunci: Aliran konveksi campuran, fluida viskoelastis, metode Keller-Box

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan kesempatan dan petunjuk-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul

“Aliran Konveksi Campuran Dari Fluida Viskoelastis Yang Melewati Silinder Teriris”

Tugas akhir ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas akhir ini dapat terselesaikan tidak lepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Kedua Orang tua, Bapak Komar Baihaqi dan Ibu Agustin Islamiyah yang telah memberikan motivasi sampai terselesaikannya Tugas akhir ini.
2. Bapak Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D. selaku rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya yang telah memberikan kesempatan dan fasilitas yang mendukung kepada penulis untuk menyelesaikan Tugas akhir ini.
3. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. selaku dekan FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS).
4. Bapak Dr. Imam Mukhlash, MT selaku ketua Jurusan Matematika ITS.
5. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif S.Si, M.Si selaku Ketua Program Studi Jurusan Matematika ITS.
6. Bapak Drs. Nurul Hidayat, M.Kom. selaku dosen wali.
7. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. dan Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, perhatian, arahan, nasehat, dan motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan Tugas akhir ini.

8. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuan kepada penulis dan juga segala bantuan, kemudahan dan kelancaran selama penulis mengikuti proses perkuliahan.
9. Saudara kandung dan keponakan khususnya Abid dan Azka yang telah memberikan dukungan moral selama penulis menempuh pendidikan.
10. Ust. M. Bahtiar Ubaidillah M.Pd.I yang telah memberikan masukan dan dukungan kepada penulis.
11. Kakak-kakak S2 Matematika ITS khususnya Mbak Indira, Mbak Firda, Mbak Ayu, Mbak Yunita, Mas Gede dan Mas Rahmat yang telah membantu penulis menyelesaikan Tugas Akhir.
12. Teman-teman S1 Matematika ITS angkatan 2012 khususnya Dyah ayu, popy, azi, Ella, Yunita, Cendy, yang telah menemani, memotivasi, dan segala bantuannya selama ini.
13. Semua pihak yang turut serta mendukung dalam penyusunan Tugas akhir ini.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari berbagai pihak, sehingga penelitian selanjutnya diharapkan bisa lebih baik dan semoga Tugas akhir ini bermanfaat bagi semua pihak, bagi kemajuan dan perkembangan ilmu pengetahuan dan dapat berkontribusi terhadap kemajuan ITS, bangsa dan negara

Surabaya, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

	Hal
JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN.....	v
ABSTRAK.....	vii
<i>ABSTRACT</i>	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xv
DAFTAR TABEL.....	xvii
DAFTAR SIMBOL.....	xix
DAFTAR LAMPIRAN.....	xxi
 BAB I PENDAHULUAN	 1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Batasan Masalah.....	4
1.4 Tujuan.....	5
1.5 Manfaat.....	5
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA	 7
2.1 Penelitian Terdahulu.....	7
2.2 Konveksi Persamaan Panas.....	7
2.3 Lapisan Batas.....	8
2.4 Fluida Non-Newtonian.....	9
2.5 Persamaan Pembangun.....	13
2.5.1 Persamaan Kontinuitas.....	13
2.5.2 Persamaan Momentum.....	13
2.5.3 Persamaan Energi.....	14
2.6 Bilangan Prandtl (<i>Pr</i>).....	14
2.7 Aliran Tunak (<i>Steady Flow</i>).....	15

2.8 Metode Beda Hingga.....	15
2.9 Metode Keller Box.....	15
BAB III METODE PENELITIAN	17
3.1 Tahapan Penelitian.....	17
3.2 Tahapan Implementasi.....	19
BAB IV MODEL MATEMATIKA	21
4.1 Persamaan Pembangunan.....	21
4.2 Persamaan Non-Dimensional.....	27
4.3 Penyelesaian Numerik Model.....	31
4.3.1 Diskritisasi Model.....	31
4.3.2 Linierisasi Model.....	35
4.3.3 Teknik Eliminasi Blok.....	39
4.4 Hasil Simulasi Numerik.....	50
4.4.1 Pengaruh Parameter Konveksi Campuran....	50
4.4.2 Pengaruh Parameter Viskoelastis.....	52
4.4.3 Pengaruh Parameter Bilangan Prandtl.....	53
4.4.4 Pengaruh Variasi Sudut Irisan.....	55
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	57
5.1 Kesimpulan.....	57
5.2 Saran.....	59
DAFTAR PUSTAKA	61
LAMPIRAN	63

DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 1.1 Model Fisik dari Silinder Teriris.....	3
Gambar 1.2 Silinder Teriris yang Dilewati Fluida.....	4
Gambar 2.1 Lapisan Batas yang Terbentuk dari Fluida yang Melewati Suatu Permukaan Lengkung.....	9
Gambar 3.1 model fisik dari aliran yang melalui silinder teriris <i>bluff body</i>	18
Gambar 4.1 Stensil Beda Hingga.....	32
Gambar 4.2 Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Konveksi Campuran.....	50
Gambar 4.3 Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Konveksi Campuran.....	51
Gambar 4.4 Profil Kecepatan Variasi Parameter Viskoelastis (k).....	52
Gambar 4.5 Profil Temperatur Variasi Parameter Viskoelastis (K).....	52
Gambar 4.6 Profil Kecepatan dengan Variasi Bilangan Prandtl (Pr).....	53
Gambar 4.7 Profil Temperatur dengan Variasi Bilangan Prandtl (Pr).....	54
Gambar 4.8 Profil Kecepatan dengan Variasi Sudut Irisan (θ_s).....	55
Gambar 4.9 Profil Temperatur dengan Variasi Sudut Irisan (θ_s).....	55

DAFTAR TABEL

	Hal
Tabel 2.1 Klasifikasi fluida non-Newtonian.....	10

DAFTAR SIMBOL

ρ	: Densitas fluida.
μ_0	: Viskositas dinamik.
\mathbf{V}	: Komponen kecepatan fluida, dengan $\mathbf{V} = (u, v, 0)$.
u	: Komponen kecepatan pada sumbu- x .
v	: komponen kecepatan sumbu- y .
\mathbf{d}	: Tingkat deformasi tensor.
$\hat{\mathbf{d}}$: Konvektif derivatif atas.
g	: Gravitasi.
\bar{n}	: Vektor normal terhadap elemen dA .
$\bar{\tau}$: Gaya viskos/ kental.
F	: Gaya pada benda.
F_x	: Gaya pada sumbu- x .
F_y	: Gaya pada sumbu- y .
J	: Kerapatan arus.
P	: Tekanan.
P_h	: Tekanan hidrostatik.
P_d	: Tekanan dinamis.
I	: matriks identitas.
K	: Parameter viskoelastik.
K^*	: Parameter permabilitas dari media berpori.
λ	: Parameter konveksi campuran.
C_f	: koefisien gesekan kulit (<i>skin friction</i>).
Pr	: Bilangan Prandtl.
Re	: Bilangan Reynolds.
Gr	: Bilangan Grashof.
T	: Temperatur.
k_0	: Koefisien memori pendek.
U_w	: Kecepatan konstan pada dinding.
U_∞	: Kecepatan aliran bebas.
x	: koordinat arah gerak permukaan.
y	: koordinat arah normal terhadap gerak permukaan.
t	: waktu.

\forall : Volume fluida.
 ψ : Fungsi aliran.

DAFTAR LAMPIRAN

	Hal
A. Perhitungan persamaan pembangun Non-dimensional.....	63
B. Perhitungan Persamaan Similiaritas.....	73
C. Matlab code.....	81

DAFTAR PUSTAKA

- [1.] Anwar, I., Amin, N., dan Pop, I. (2008), "Mixed Convection Boundary Layer Flow of a Viscoelastic Fluid Over a Horizontal Circular Cylinder", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 814-821.
- [2.] Aurangzaib, Kasim, A.R.M Mohammad, N.F., dan Shafie, S. (2013), "Unsteady MHD Mixed Convection Flow with Heat and Mass Transfer over a Vertical Plate in a Micropolar Fluid-Saturated Porous Medium", *Journal of Applied Science and Engineering*, 141-150.
- [3.] Co, A. dan Bird, R.B. (1997), "slow Viscoelastic Radial Flow between Parallel Disks", *Applied Scientific Research*, 385-404.
- [4.] Hussanan, A., Ismail, Z., Khan, I., Hussein, A., dan Shafie, S. (2014), "Unsteady Boundary Layer MHD Free Convection Flow in a Porous Medium with Constant Mass Diffusion and Newtonian Heating", *The European Physical Journal Plus*. 1-16.
- [5.] Kasim, A.R.M. (2014), *Convective Boundary Flow of Viscoelastic Fluid*, Thesis Ph.D., Faculty of science Universiti Teknologi Malaysia, Malaysia.
- [6.] Leal, L.G. (1992), *Laminar Flow and Convective Transport Process: Scalling, Principles and Asymtotic Analysis*, Heinemann, London.
- [7.] Merkin, M.M., Hossain, M.A., dan Taher, M.A. (2006), "Magnetohydrodynamics Natural Convection Flow on a Sphere with Uniform Heat Flux in Presence of Heat Generation", *Acta Mechanica*, 75-86.
- [8.] Nazar, R., Amin, N., dan Pop, I. (2003), "Mixed Convection Boundary Layer Flow from a Horizontal Circular Cylinder in

Micropolar Fluids: Case of Constant Wall Temperature”, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 86-109.

- [9.] Ozisik, M.N. (1985), *Heat Transfer: A Basic Approach*, McGraw-Hill, New York.
- [10.] Potter, M. dan David. (2008), *Schaums's online of Fluid Mechanics*, Erlangga, Jakarta.
- [11.] Widodo, B., and Imron, C., Siswono, G.O., T. Rahayuningsih and Purbandini (2015), *Viskoelastic fluid flow pass a porous circular cylinder when the magnetic field included*. Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS) Volume 99, Number 2, 2016, pp 173-186.
- [12.] Widodo, B., and Imron, C., Anggraini, I., Khalimah, D.A., Shafarina, F.D. (2016), *Unsteady boundary layer magnetohydrodynamics in micropolar fluid past a sphere*. Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS) Volume 100, Number 2, 2016, pp 291-299.
- [13.] Widodo, B., Mohamed, M.K.A., Salleh, M.Z., Hussanan, A., Sarif, N.Md., Noar, N.A.Z.Md., Ishak, A. (2016), *Mathematical model of free convection boundary layer flow on solid sphere with viscous dissipation and thermal radiation*. International Journal of Computing Science and Applied Mathematics, Volume 2, Number 2, 2016.
- [14.] Widodo, B. (2012), *Pemodelan Matematika*, ITSpress, Surabaya, Indonesia.

BAB I PENDAHULUAN

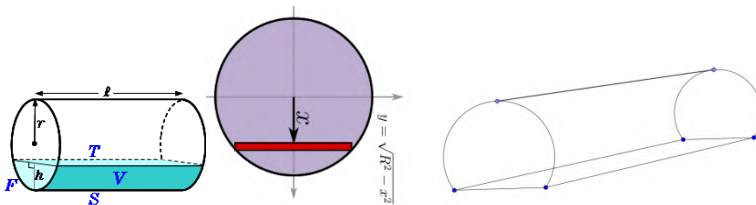
1.1 Latar Belakang Masalah

Perpindahan panas konvektif atau yang lebih dikenal dengan konveksi merupakan perpindahan panas dari satu tempat ke tempat lain yang disebabkan oleh pergerakan fluida. Bentuk konvektif dari persamaan panas pada umumnya dibagi menjadi dua proses dasar, yakni konveksi bebas (*free convection*) atau natural dan *forced convection* (konveksi yang dipaksa oleh pergerakan fluida). Konveksi bebas atau natural terjadi pada saat pergerakan fluida disebabkan oleh gaya apung (*buoyancy forces*) yang dihasilkan dari perbedaan massa jenis sesuai dengan variasi suhu fluida. Sedangkan *forced convection* terjadi pada saat fluida dipaksa untuk mengalir di atas permukaan oleh sumber eksternal ataupun internal. Sumber internal bekerja pada saat fluida mengalir di antara benda solid seperti mengalir melalui pipa, sedangkan sumber eksternal bekerja pada saat fluida mengalir tanpa batasan dari benda solid atau dapat dikatakan pada saat fluida mengalir di atas permukaan pelat datar.

Pada perkembangan perpindahan panas konvektif, dikenal konveksi alir campuran (*mixed convection flows*) atau konveksi campuran (*mixed convection*) yang merupakan kombinasi dari aliran konveksi natural dan *forced convection*. Konveksi campuran terjadi pada saat efek dari gaya alir pada konveksi bebas menjadi signifikan. Contoh dari konveksi campuran dalam kehidupan sehari-hari dapat kita lihat pada saat asap timbul dari api (*natural*) dan pada saat bersamaan asap ditimbulkan oleh faktor eksternal seperti ledakan dari silinder gas (*forced*).

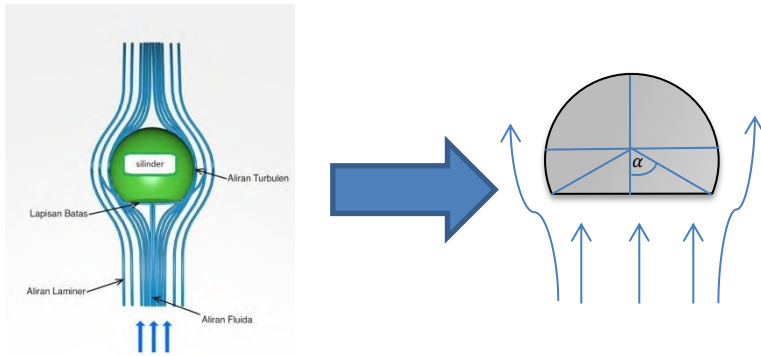
Studi pada jenis-jenis konveksi sering dilakukan oleh banyak peneliti terutama untuk pengaplikasian teknik. Solusi analitik eksak pada persamaan konveksi juga masih dikembangkan sesuai dengan kekompleksan dari kenonlinearan pada persamaan energi. Upaya awal untuk menghitung permasalahan ini melibatkan penyelesaian persamaan lapisan batas (*Boundary Layer*) yang sederhana.

Boundary layer atau lapisan batas adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat dimana fluida mengalir. *Boundary layer* suatu fluida dipengaruhi oleh viskositas, ukuran maupun gaya inersia benda tersebut. Berbagai macam proses transfer yang berlangsung pada fluida dan benda padat adalah massa, momentum, energi dan *heat transfer*. Pada saat memformulasikan hukum kekekalan massa, momentum, dan energi, hukum termodinamik dan gas dinamik juga harus diperhatikan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa bersama dengan aliran *boundary layer*, ada juga *thermal boundary layer* dan pengaruh timbal balik dari lapisan-lapisan batas lain. Teori mengenai lapisan batas digunakan pada berbagai ilmu teknik dan sains, seperti hidrodinamik, aerodinamik, automobile, teknik perminyakan dan teknik kelautan. Beberapa penelitian dengan menggunakan *boundary layer* pun sudah sering dilakukan, contohnya aliran fluida pada pelat datar (Sharidan, Amin dkk (2006), Bataller (2007), Amin dan Das (2013), Hussanan, Ismail dkk (2014)), aliran fluida pada sirkular silinder (Anwar, Amin dkk (2008)), dan aliran fluida pada bola (Shafie, Amin dkk (2005)).



Gambar 1.1: Model fisik dari silinder teriris

Meskipun riset mengenai *heat transfer* pada fluida yang bersifat viskos (Newtonian) sudah banyak namun riset untuk non-Newtonian sangat kurang. Fluida Non-Newtonian pada dasarnya mendefinisikan fluida yang memiliki retensi memudar dari asal alirannya (Brujan (2011)). Berikut ini adalah contoh dari fluida Non-Newtonian, yakni fluida pseudoplastic, fluida shear-thinning, fluida viskoelastis, fluida nano dan fluida thixotropic. Sehingga pada penelitian ini beberapa permasalahan yang mengaplikasikan konsep dari *boundary layer* untuk fluida viskoelastis akan dipertimbangkan. Model sederhana untuk fluida viskoelastis pada awalnya diperkenalkan oleh Rivlin (1949). Penelitian untuk fluida viskos-elastis juga dilakukan oleh Co dan Bird (1977), mereka mengatakan bahwa fluida tidak akan pernah bergerak sangat jauh atau sangat rapat dari konfigurasi awalnya. Dalam beberapa tahun ini, penelitian untuk permasalahan fluida viskoelastis menjadi sangat penting, mengingat pemanfaatannya yang sangat luas dan bisa digunakan untuk pengembangan ilmu sains maupun teknik. Maka perlu dilakukan penelitian untuk permasalahan fluida viskoelastis. Tugas akhir ini meneliti dari aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastis yang melewati silinder teriris. Ditunjukkan pada Gambar 1.1 yaitu model fisik dari silinder teriris dan Gambar 1.2 menunjukkan Aliran fluida yang melewati silinder teriris.



Gambar 1.2. Silinder teriris yang dilewati fluida

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas dalam Tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana perumusan model matematika dari aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastis yang melewati silinder teriris.
2. Bagaimana solusi numerik dari model matematika dari aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastis yang melewati silinder teriris.
3. Bagaimana pengaruh dari parameter konveksi campuran, parameter Viskoelastis, Bilangan Prandtl dan variasi sudut pada distribusi kecepatan dan temperatur.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang akan digunakan dalam Tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Konveksi campuran alir melalui silinder teriris horizontal.
2. Aliran fluida yang digunakan adalah *incompressible*.
3. Diasumsikan dalam temperature dan flux panas konstan

4. Penyelesaian numerik menggunakan skema Metode Beda Hingga (*Metode Difference Method*) Box-Keller.
5. Aliran lapisan batas konveksi campuran bersifat tunak (*steady-state*).
6. Silinder yang digunakan adalah silinder pejal.

1.4 Tujuan

Tujuan yang diharapkan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Merumuskan model matematika dari aliran konveksi campuran dari fluida viskoelastis yang melewati silinder teriris.
2. Membangun algoritma penyelesaian dari model matematika dari aliran konveksi campuran dari fluida viskoelastis yang melewati silinder teriris.
3. Mengetahui pengaruh dari parameter konveksi campuran, parameter viskoelastis, Bilangan Prandtl dan variasi sudut pada distribusi kecepatan dan temperatur.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penelitian pada ini adalah sebagai suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu Matematika terapan, khususnya aplikasi metode beda hingga menggunakan metode box keller pada permasalahan aliran fluida viskoelastik yang melewati silinder teriris dengan area terletak pada bagian lapisan batas.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai penelitian yang dilakukan, fluida, lapisan batas, fluida newtonian dan fluida non-newtonian, persamaan kontinuitas, persamaan momentum, persamaan energi, dan metode beda hingga, dan metode Keller-Box.

2.1 Penelitian Terdahulu

Penelitian dengan menggunakan konveksi campuran pada suatu fluida yang melewati silinder sirkular pernah dilakukan oleh Merkin (1976), Nazar, dkk (2003), dan Anwar, dkk (2008). Pada penelitian yang dilakukan oleh Anwar (2008), tentang aliran konveksi pada fluida viskoelastik yang melewati silinder sirkular horizontal dijelaskan penyelesaian persamaan lapisan batas dengan penyelesaian numeriknya menggunakan metode beda hingga Keller Box. Pada penelitian tersebut tidak ada pengaruh porositas pada silinder dan medan magnet pada fluida. Sehingga untuk pengembangan penelitian menggunakan silinder berpori pada fluida bermedan magnet.

2.2 Konveksi Persamaan Panas

Perpindahan panas konvektif atau yang lebih dikenal dengan konveksi merupakan perpindahan panas dari satu tempat ke tempat lain yang disebabkan oleh pergerakan fluida. Bentuk konvektif dari persamaan panas pada umumnya dibagi menjadi dua proses dasar, yakni:

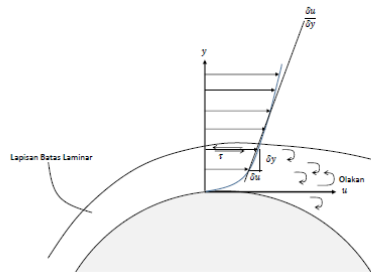
1. Konveksi bebas (*free convection*) atau natural Konveksi bebas atau natural terjadi pada saat pergerakan fluida disebabkan oleh gaya apung (*buoyancy forces*) yang dihasilkan dari perbedaan massa jenis sesuai dengan perubahan/variasi suhu fluida.

2. *Forced convection* (konveksi yang dipaksa oleh pergerakan fluida). *Forced convection* terjadi pada saat fluida dipaksa untuk mengalir di atas permukaan oleh sumber eksternal ataupun internal. Sumber internal bekerja pada saat fluida mengalir di antara benda padat seperti mengalir melalui pipa, sedangkan sumber eksternal bekerja pada saat fluida mengalir tanpa batasan dari benda padat atau dapat dikatakan pada saat fluida mengalir di atas permukaan pelat datar.

Pada perkembangan perpindahan panas konvektif, dikenal konveksi alir campuran (*mixed convection flows*) atau konveksi campuran (*mixed convection*) yang merupakan kombinasi dari aliran konveksi natural dan *forced convection*. Konveksi campuran terjadi pada saat efek dari gaya alir pada konveksi bebas menjadi signifikan. Contoh dari konveksi campuran dalam kehidupan sehari-hari dapat kita lihat pada saat asap timbul dari api (*natural*) dan pada saat bersamaan asap ditimbulkan oleh faktor eksternal seperti ledakan dari gas silinder (*forced*).

2.3 Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Boundary layer adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat tempat fluida mengalir, dimana di dalam lapisan tersebut pengaruh viskositas maupun gaya inersia sangat berpengaruh. Gambar 2.1 ketika partikel fluida melewati permukaan lengkung yang membentuk lapisan batas.



Gambar 2.1: Lapisan Batas yang terbentuk dari Fluida yang melewati suatu permukaan lengkung

Lapisan batas laminar dapat dengan mudah diklasifikasikan menurut struktur dan keadaan di mana mereka ditimbulkan. Lapisan geser tipis (*thin shear*) yang berkembang pada benda yang berotasi adalah contoh dari lapisan batas Stokes. Sedangkan lapisan batas Blasius mengacu pada kesamaan solusi pada pelat datar yang terpasang berdekatan. Ketika fluida berputar dan gaya viskus yang seimbang dengan efek Coriolis (bukan konvektifinersia) akan membentuk lapisan Ekman. Dalam teori perpindahan panas, lapisan batas termal akan terbentuk. Permukaan dapat memiliki beberapa jenis lapisan batas secara bersamaan.

2.4 Fluida Non-Newtonian

Fluida non-Newtonian adalah fluida yang akan mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini menyebabkan fluida non-Newtonian tidak memiliki viskositas yang konstan dan laju deformasi berlangsung tak linier atau dengan kata lain tidak memenuhi hukum linier Newton.

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial x} = \text{tak linier}$$

Dengan:

τ = Tegangan geser fluida

μ = Viskositas fluida

$\frac{\partial v}{\partial x}$ = Gradient kecepatan yang arahnya tegak lurus dengan arah geser

Klasifikasi fluida non-newtonian dijelaskan pada Tabel 2.1:

Tabel 2.1: Klasifikasi fluida non-Newtonian

Tipe Fluida	Perilaku	Karakteristik	Contoh
Plastik Padat	Plastik Sempurna	Tegangan tidak menghasilkan regangan yang berkebalikan	Logam duktil
	Plastik Bingham	Tegangan geser dan regangan memiliki hubungan linier bila batas tegangan geser mulai berpengaruh terlampaui	Lumpu, beberapa koloid
	Yield Pseudoplastik	Pseudoplastik yang melampaui beberapa batas tegangan geser mulai berpengaruh	

	Yield dilatant	Dilatant yang melampaui beberapa batas tegangan geser mulai berpengaruh	
Fluida Eksponensial	Pseudoplastik	Pengurangan viskositas terlihat dengan jelas dengan adanya peningkatan gaya geser	Beberapa koloid, tanah liat, susu, gelatin, darah
	Dilatant	Peningkatan viskositas terlihat dengan jelas dengan adanya peningkatan gaya geser	Larutan gula pekat dalam air, suspensi pati beras atau pati jagung
Viscoelastics (Viscosity and elastic)	Material Maxwell	Kombinasi linier “seri” dari efek elastis dan viskos	Logam material komposit

	Fluida	Kombinasi linier dari perilaku	Bitumen,
	Oldroyd-B	Maxwell dan Newtonian	adonan, nilon
	Anelastis	Material kembali ke bentuk awal bila gaya yang bekerja dihilangkan	
Viskositas yang bergantung waktu	Rheopektik	Peningkatan viskositas terlihat dengan jelas seiring dengan lama durasi tegangan	Beberapa lubrikan

	Tiksotropik	Penurunan viskositas terlihat dengan jelas seiring dengan lama durasi tegangan	Saus tomat dan beberapa jenis madu
--	-------------	--	------------------------------------

2.5 Persamaan Pembangun

2.5.1 Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas diperoleh dengan hukum konservasi massa yaitu laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem dengan jumlah massa dalam suatu sistem adalah konstan. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut (Potter *dkk*,2012):

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0$$

Dengan M_{sys} adalah massa system yang sama dengan jumlah dari semua perkalian fluida dengan volume fluida pada sistem tersebut.

2.5.2 Persamaan Momentum

Apabila suatu partikel fluida bergerak maka hukum kedua Newton yang digunakan sebagai dasar penurunan persamaan momentum. Hukum kedua Newton menyatakan sebagai laju perubahan terhadap waktu dari momentum system sama dengan jumlah dari gaya-gaya luar yang bekerja pada system. Momentum suatu system adalah massa system dikalikan dengan kecepatan. Secara sistematis, ditulis sebagai berikut:

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho \, dV$$

2.5.3 Persamaan Energi

Fluida akan mengalir dari bawah keatas yang disebabkan oleh bagian fluida terkena panas akibat adanya pengaruh konveksi campuran. Kemudian mengalami perbedaan temperatur sehingga mengakibatkan perbedaan kerapatan. Akibat dari aliran fluida dengan temperatur yang berbeda menimbulkan adanya perpindahan energi yang berasal dari kalor antara media dan fluida. Pada fenomena ini menunjukkan berlakunya hukum Termodinamika I. Secara matematis ditulis dalam bentuk:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho \, dV = \dot{Q} - \dot{W}$$

2.6 Bilangan Prandtl (P_r)

Bilangan yang tidak berdimensi adalah Prandtl, dalam bentuk persamaan

$$P_r = \frac{\nu}{a} = \eta \cdot \frac{C_p}{\lambda}$$

P_r = Bilangan Prandtl (tanpa dimensi)

ν = viskositas kinematis (m^2/jam)

a = penyerapan panas / *thermal diffusivity* (m^2/jam)

η = viskositas dinamis ($kcal/m \, jam$)

C_p = panas spesifik ($kcal/kg^\circ C$)

λ = koefisien perpindahan panas konduksi ($kcal/m \, jam \, ^\circ C$)

2.7 Aliran Tunak (*Steady Flow*)

Aliran tunak (*steady state*) adalah kondisi sewaktu sifat-sifat suatu sistem tak berubah dengan berjalannya waktu atau dengan kata lain, konstan. Dapat ditulis:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Pada kebanyakan sistem, keadaan tunak baru akan dicapai beberapa waktu setelah sistem dimulai. Kondisi awal ini sering disebut sebagai keadaan transien.

2.8 Metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*)

Dalam matematika, metode beda hingga (FDM) adalah metode numerik untuk mendekati solusi dari persamaan diferensial menggunakan persamaan beda hingga untuk mendekati derivative. Metode beda hingga secara umum memiliki tiga pendekatan yang berbeda yaitu:

- Beda Maju

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Beda Mundur

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

- Beda Pusat

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

2.9 Metode Keller Box

Metode keller box adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan parabolik, terutama persamaan lapisan batas. Bentuk implisit dengan keakurasiannya orde kedua baik terhadap ruang

maupun waktu yang mana penyelesaian step size untuk waktu dan ruang tidak harus sama. Hal ini membuat persamaan diferensial parsial parabolik lebih efisien dan tepat. Penerapan metode keller-box ini dimulai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk persamaan diferensial orde dua atau orde tinggi menjadi persamaan diferensial orde satu satu. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu yaitu sebagai berikut:

$$v_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (v_i + v_{i-1})$$

$$u^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (u^n + u^{n-1})$$

BAB III

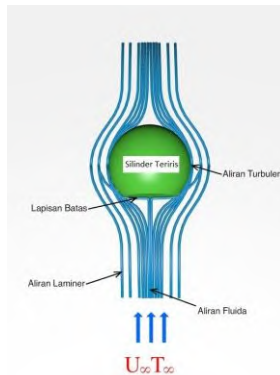
METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan mengenai tahapan dan tempat penelitian yang dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik yang melewati silinder teriris. Adapun tempat dan tahapan penelitian yang digunakan sebagai berikut:

3.1 Tahapan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah yang telah dijelaskan, tugas akhir ini diselesaikan dengan menggunakan tiga tahap, yaitu tahap analisa awal atau analisa permasalahan, tahap implementasi, dan tahap penyelesaian dan analisa hasil akhir.

Pada tugas akhir ini fluida viskoelastik memiliki pengaruh besar pada fluida Newtonian. Penelitian ini dilakukan pada daerah dekat dengan *bluff body*. Maka pada penelitian ini model yang dibangun adalah model matematika di daerah lapisan batas dari silinder teriris *bluff body*, yakni disekitar titik stagnasi terendah ($x \approx 0$). Titik stagnasi terendah adalah titik dimana lapisan batas berada paling dekat dengan permukaan benda



Gambar 3.1: model fisik dari aliran yang melalui silinder teriris *bluff body*

Pada Gambar 3.1 dapat diketahui bahwa fluida viskoelastik bergerak dari bawah ke atas melewati sebuah silinder teriris yang memiliki panjang sumbu vertikal atau sumbu yang searah dengan aliran dengan kecepatan *ambient fluid* U_{∞} dan temperatur *ambient fluid* T_{∞} . Berdasarkan penjelasan tersebut, dapat dilakukan langkah-langkah dalam menjawab rumusan masalah pada Bab I, yaitu:

1. Studi literatur.
2. Penurunan persamaan konservasi massa, hukum Newton II, dan hukum I Termodinamika untuk mendapatkan persamaan pembangun.
3. Persamaan pembangun disederhanakan dengan menggunakan pendekatan Boussinesq dan teori lapisan batas sehingga diperoleh persamaan pembangun yang berdimensi dari aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik yang melewati silinder teriris.
4. Menentukan kondisi batas (*boundary condition*).

3.2 Tahapan Implementasi

Pada tahap ini, dilakukan implementasi metode Keller Box yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan ini. Persamaan yang didiskritisasi dengan metode ini adalah persamaan similiaritas, dimana persamaan similiaritas dari model ini didapatkan dengan melakukan beberapa tahapan yaitu:

1. Mengubah persamaan dimensional ke dalam bentuk persamaan non-dimensional dengan mensubstitusikan variabel non-dimensional.
2. Persamaan non-dimensional selanjutnya diubah menjadi persamaan similar dengan mensubstitusi fungsi aliran (*stream function*).

Persamaan similiaritas model aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik yang melewati silinder teriris pada titik stagnasi terendah ($x \approx 0$) adalah sebagai berikut:

$$0 = f''' + ff'' - f'^2 + \frac{1}{\cos \theta_s} + \frac{\lambda \theta}{\cos \theta_s} - K(2f'f''' - ff^{(4)} - f''^2) \quad (3.1)$$

$$0 = \frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' \quad (3.2)$$

Implementasi metode Keller Box pada Persamaan (3.1) dan (3.2) diubah terlebih dahulu ke dalam bentuk orde pertama yang kemudian dilakukan diskritisasi dengan menggunakan metode beda pusat.

3.2.1 Tahap Analisis Akhir

Pada tahap ini akan dilakukan beberapa tahapan sebagai berikut:

1. Hasil diskritisasi dari Persamaan (3.1) dan (3.2) diselesaikan secara numerik menggunakan Matlab.
2. Dilakukan variasi parameter viskoelastik (K), parameter konveksi campuran (λ), parameter porositas (ϕ), dan bilangan Prandtl (Pr) agar diketahui pengaruhnya terhadap karakteristik dari fluida, yaitu: profil kecepatan dan profil temperatur.
3. Visualisasi hasil numerik dilakukan dengan menggunakan Matlab untuk mempermudah dan mendukung hasil-hasil pengukuran.
4. Analisa hasil dan simulasi numerik yang dipengaruhi oleh parameter-parameter terhadap karakteristik fluida.

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai model matematika aliran konveksi campuran dari fluida viskoelastis yang melewati silinder teriris menggunakan beberapa persamaan pembangun. Pengubahan persamaan pembangun dimensional menjadi persamaan non-dimensional. Persamaan non-dimensional ditransformasi ke persamaan similiaritas. Penyelesaian numerik menggunakan metode Keller-box dan analisis hasil simulasi.

4.1 Persamaan Pembangun

Pada sub bab ini membahas persamaan pembangun model yang memuat persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi. Persamaan yang digunakan adalah persamaan pembangun pada kondisi tak tunak (*unsteady*) dan *incompressible* (Widodo *dkk.*, 2015) sebagai berikut:

Persamaan kontinu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

Persamaan momentum ke arah sumbu- x :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \sigma u B_0^2 - \rho \beta (T - T_\infty) g_x \quad (4.2)$$

Persamaan momentum ke arah sumbu- y :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \sigma v B_0^2 - \rho \beta (T - T_\infty) g_y \quad (4.3)$$

Persamaan energi:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.4)$$

Persamaan pembangun dimensional yang diperoleh nantinya diubah ke dalam persamaan non-dimensional. Kemudian persamaan non-dimensional diubah kedalam bentuk persamaan similiaritas dan diselesaikan dengan metode numerik Keller Box. Berikut ini persamaan-persamaan pembangun yang digunakan pada aliran fluida yang bersifat *steady* dan *incompressible* (Galuh (2015)) maka Persamaan (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) berturut-turut menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ & - k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^3} \right) \right. \\ & - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ & \left. - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + g_x \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\
&- k_0 \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial^3 x} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right. \\
&+ \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
&\left. - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + g_y
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{4.8}$$

Kemudian pada kondisi *steady* yaitu ρ konstan dan tidak bergantung pada waktu, sehingga Persamaan (4.5) sampai Persamaan (4.8) menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\
&- \frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^3} \right) \right. \\
&- \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
&\left. - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] - g_x
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \\
& - \frac{k_0}{\rho} \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right) \\
& + \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\
& - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Big) + g_y
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{4.12}$$

Karena gaya yang bekerja pada kasus ini adalah gaya gravitasi, maka didefinisikan $\mathbf{g} = (-g_x, -g_y, 0)$, maka Persamaan (4.9) sampai Persamaan (4.12) menjadi:

Persamaan kontinu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Persamaan momentum ke arah sumbu- x :

$$\begin{aligned}
\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \\
& - \frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^3}\right)\right. \\
& - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\
& \left. - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right] - g_x
\end{aligned}$$

Persamaan momentum ke arah sumbu-y:

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ & - \frac{k_0}{\rho} \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial^3 x} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right. \\ & + \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ & \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + g_y \end{aligned}$$

persamaan energi:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

dan pada tugas akhir ini menggunakan konveksi campuran maka menggunakan pendekatan Boussinesq yang pada umumnya digunakan pada aliran konveksi natural. Menurut pendekatan Boussinesq, perbedaan densitas yang cukup kecil dapat diabaikan, kecuali pada saat dikalikan dengan gravitasi (g). Percepatan gravitasi yang digunakan adalah (Kasim(2014)):

$$g_x = -g \tan\left(\frac{x}{b}\right)$$

$$g_x = -g \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)$$

$$g_y = \frac{g}{\cos\left(\frac{\bar{x}}{b}\right)}$$

$$g_y = \frac{g}{\cos\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)}$$

Dengan b adalah radius silinder teriris.

Kemudian persamaan dievaluasi pada luar lapisan batas maka didapat (Aurangzaib, dkk., 2013):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ & - g\beta(T \\ & - T_\infty) \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ & + g\beta(T \\ & - T_\infty) \frac{g}{\cos\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)} \end{aligned}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Dengan $u_e(x)$ adalah kecepatan pada luar daerah lapisan batas. Sehingga persamaan dapat dituliskan:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ & - g\beta(T \\ & - T_\infty) \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ & + g\beta(T \\ & - T_\infty) \frac{g}{\cos \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.16)$$

4.2 Persamaan Non-Dimensional

Berdasarkan persamaan pembangun yang didapat pada bab sebelumnya maka akan diubah ke bentuk persamaan non-dimensional dengan menggunakan variabel non-dimensional dan parameter non-dimensional.

Diberikan kondisi batas sebagai berikut:

$$\bar{u} = \bar{v} = 0, T = T_w, \text{ untuk } \bar{y} = 0,$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e(x), \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0, T = T_\infty, \text{ untuk } \bar{y} \rightarrow \infty$$

Variabel non-dimensional pada tugas akhir ini yaitu:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{a}, y = R_e^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\bar{y}}{a} \right), u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, \\ v &= R_e^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\bar{v}}{U_\infty} \right), u_e = \frac{\bar{u}_e}{\bar{x}} U_\infty, \theta = \frac{(T - T_\infty)}{(T_w - T_\infty)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dengan bilangan Reynold (R_e) adalah $R_e = \frac{U_\infty a}{\nu}$,

Pada tugas akhir ini, parameter-parameter yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Pr &= \frac{\nu}{\alpha} \\ K &= \frac{k_0 U_\infty}{a \rho \nu} \\ \lambda &= \frac{Gr}{Re^2} \end{aligned}$$

Dengan bilangan Grashof:

$$Gr = g\beta(T - T_\infty) \frac{a^3}{\nu^2}$$

kemudian dilakukan substitusi Persamaan (4.17) ke Persamaan pembangun diemensional (4.13), (4.14), (4.15), dan (4.16), dikarenakan Akibat dari proses penyederhanaan dengan teori persamaan lapisan batas menurut Ozisik (1985), persamaan momentum pada sumbu y dapat diabaikan karena pada pendekatan persamaan lapisan batas menunjukkan momentum pada sumbu- y bersifat konstan di seluruh lapisan batas. sehingga didapat persamaan pembangun non dimensional, yaitu:

Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Persamaan momentum:

$$\begin{aligned} & u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \\ &+ \lambda \theta \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \end{aligned}$$

Persamaan energi:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

Kondisi batas persamaan (4.26) menjadi:

$$u = v = 0, \theta = 1 \text{ untuk } y = 0$$

$$u = u_e(x), \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \theta = 0 \text{ untuk } y \quad (4.18)$$

Dengan mentransformasikan persamaan pembangun non-dimensional ke dalam bentuk persamaan similiaritas, yaitu dengan mensubstitusi variabel similiaritasnya. Pada permasalahan persamaan lapisan batas, mengubah beberapa koordinat menjadi satu koordinat yang sama tanpa merubah bentuk asli koordinat merupakan bentuk solusi persamaan similiaritas. Persamaan similiaritas. Pada tugas akhir ini, menggunakan variabel similiaritas sebagai berikut (Galuh, 2015):

$$\psi = xf(x, y), \theta = \theta(x, y) \quad (4.19)$$

Dengan ψ merupakan fungsi aliran (*stream function*):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.20)$$

Diasumsikan $u_e(x) = \sin \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)$.

Subtitusikan Persamaan (4.19) dan (4.20) ke persamaan pembangun non-dimensional, maka diperoleh persamaan similiaritas sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\
 = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \\
 - K \left(2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) \\
 - Kx \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} \right. \\
 \left. - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{1}{\cos \theta_s} \\
 + \frac{\lambda \theta}{\cos \theta_s} \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

$$x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + f \frac{\partial \theta}{\partial y} \tag{4.22}$$

Untuk kondisi batas persamaan non-dimensional, yaitu Persamaan (4.18) diubah ke dalam kondisi batas persamaan similar, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \theta = 1 \text{ untuk } y = 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\cos \theta_s}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \theta = 0 \text{ untuk } y \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Pada tugas akhir ini karakteristik fluida yang diteliti adalah pada daerah titik stagnasi terendah, yaitu lapisan batas berada paling dekat dengan benda. Titik stagnasi terendah dari silinder teriris bernilai mendekati nol atau $x \approx 0$, sehingga Persamaan (4.21) dan (4.22) menjadi:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\cos \theta_s} + \frac{\lambda \theta}{\cos \theta_s} \\
&\quad - K \left(2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) \\
0 &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + f \frac{\partial \theta}{\partial y}
\end{aligned}$$

atau dapat direduksi ke persamaan diferensial sederhana, menjadi:

$$\begin{aligned}
0 &= f''' + f f'' - (f')^2 + \frac{1}{\cos \theta_s} + \frac{\lambda \theta}{\cos \theta_s} \\
&\quad - K(2f' f''' - f f^{(4)} - (f'')^2)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$0 = \frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta' \tag{4.24}$$

Dengan kondisi batas:

$$\begin{aligned}
f(0) &= f'(0) = 0, \theta = 1 \\
f'(\infty) &= 1, f''(\infty) = 0, \theta(\infty) = 0
\end{aligned}$$

Dengan ' adalah turunan terhadap y .

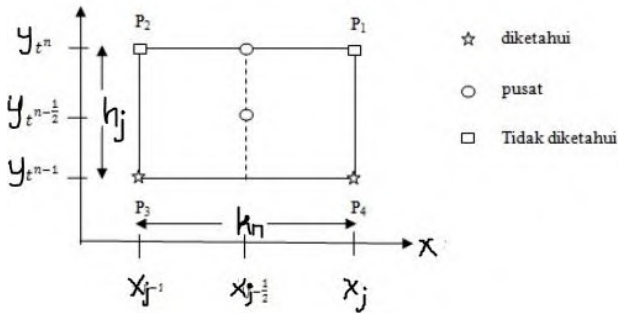
4.3 Penyelesaian Numerik Model

Setelah didapat model matematika aliran konveksi campuran dari fluida viskoelastis yang melewati silinder teriris, selanjutnya yang dilakukan adalah penyelesaian secara numerik. Pada tugas akhir ini model persamaan yang didapat diselesaikan secara numerik dengan menggunakan Keller Box. Metode ini sesuai dan efisien untuk menyelesaikan persamaan lapisan batas yang berbentuk diferensial parsial parabolik.

4.3.1 Diskritisasi Model

Persamaan (4.23) dan (4.24) merupakan persamaan orde tinggi. Menurut Kasim (2014) pada penyelesaian menggunakan

Keller Box haruslah persamaan bentuk orde satu, Menggunakan variabel dependen baru yaitu $u(x, y), v(x, y), t(x, y)$ dan $w(x, y)$, dimana $s(x, y)$ menggantikan $\theta(x, y)$ sebagai variabel untuk temperatur. Maka dilakukan pemisalan fungsi sebagai berikut



Gambar 4.1 Stensil Beda Hingga

$$f' = u \quad (4.25)$$

$$u' = v \quad (4.26)$$

$$v' = w \quad (4.27)$$

$$s' = t \quad (4.28)$$

0

$$= w + f v - (u)^2 + \frac{1}{\cos \theta_s} + \frac{\lambda s}{\cos \theta_s} - K(2uw - f w' - (v)^2) \quad (4.29)$$

$$0 = \frac{1}{Pr} t' + f t \quad (4.30)$$

Dengan kondisi batas:

$$f(x, 0) = u(x, 0) = 0 \quad ; \quad t(x, 0) = 1$$

$$u(x, \infty) = \frac{\sin \frac{x}{b}}{x} \quad ; \quad s(x, \infty) = 0$$

Kemudian dilakukan diskritisasi model menggunakan metode beda hingga (Kasim(2014)) sesuai Gambar 4.1, untuk Persamaan (4.25) sampai Persamaan (4.28) menggunakan titik tengah $(x^n, y_{j-\frac{1}{2}})$ pada ruas P_1P_2 dengan menggunakan beda pusat, sedangkan untuk bentuk tak linier pada Persamaan (4.29) dan (4.30) menggunakan titik tengah $(x^{n-\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}})$ pada segiempat $P_1P_2P_3P_4$ sehingga didapatkan

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{h_j} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) = u_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (4.31)$$

$$\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{h_j} = \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n) = v_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (4.32)$$

$$\frac{v_j^n - u_{j-1}^n}{h_j} = \frac{1}{2}(w_j^n + w_{j-1}^n) = w_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (4.33)$$

$$\frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{h_j} = \frac{1}{2}(t_j^n + t_{j-1}^n) = t_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (4.34)$$

$$\frac{1}{2}((L_1)^n + (L_1)^{n-1}) = x^{n-1/2} [\] = 0$$

$$\frac{1}{2}((L_2)^n + (L_2)^{n-1}) = x^{n-1/2} [\] = 0$$

Pada saat $x^{n-\frac{1}{2}}$ menjadi:

$$\begin{aligned} (w)^n + (f)^n(v)^n - (u^2)^n + \frac{1}{\cos \theta_s} + \frac{\lambda}{\cos \theta_s}(s)^n \\ - K(2(u)^n(w)^n - (f)^n(w')^n - (v^2)^n) \\ = -(L_1)^{n-1} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\frac{1}{Pr} (t')^n + (f)^n(t)^n = -(L_2)^{n-1} \quad (4.36)$$

Dan

$$(L_1)^{n-1} = 0$$

$$(L_2)^{n-1} = 0$$

Sehingga didapatkan titik tengah dari Persamaan (4.35) dan (4.36) adalah

$$\begin{aligned} & (w)_{j-\frac{1}{2}}^n + (f)_{j-\frac{1}{2}}^n (w)_{j-\frac{1}{2}}^n - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + \frac{1}{\cos \theta_s} + \frac{\lambda}{\cos \theta_s} (s)_{j-\frac{1}{2}}^n \\ & - K \left(2(u)_{j-\frac{1}{2}}^n (w)_{j-\frac{1}{2}}^n - (f)_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{w_j^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{h_j} \right) - \left(w_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 \right) \\ & = -(L_1)^{n-1} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \left(\frac{t_j^n - t_{j-1}^n}{h_j} \right) + (f)_{j-\frac{1}{2}}^n (t)_{j-\frac{1}{2}}^n = \\ & = -(L_2)^{n-1} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dengan h_j adalah steap size untuk x . Sedangkan k_n step size dari Δx , dimana n dan j adalah nomor urut yang menunjukkan lokasi koordinat(Kasim (2014)). Maka:

$$\begin{aligned} ()_j^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} [()_j^n + ()_{j-1}^n] \\ ()_j^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} [()_j^n + ()_j^{n-1}] \end{aligned}$$

4.3.2 Linierisasi Model

Setelah didapat hasil diskritisasi model, selanjutnya linierisasi model pada Persamaan (4.31)-(4.34) dan (4.37)-(4.38) menjadi

$$f_j - f_{j-1} - \frac{h_j}{2}(u_j + u_{j-1}) = 0 \quad (4.39)$$

$$u_j - u_{j-1} - \frac{h_j}{2}(v_j + v_{j-1}) = 0 \quad (4.40)$$

$$v_j - u_{j-1} - \frac{h_j}{2}(w_j + w_{j-1}) = 0 \quad (4.41)$$

$$s_j - s_{j-1} - \frac{h_j}{2}(t_j + t_{j-1}) = 0 \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h_j}{2}(w_j + w_{j-1}) + \frac{h_j}{4}(f_j + f_{j-1})(v_j + v_{j-1}) - \frac{h_j}{4}(u_j + u_{j-1})^2 \\ & + \frac{h_j}{\cos \theta_s} + \frac{\lambda}{\cos \theta_s}(s_j + s_{j-1}) \\ & - \frac{2K}{4}h_j(u_j + u_{j-1})(w_j + w_{j-1}) \\ & + \frac{K}{2}(f_j + f_{j-1})(w_j - w_{j-1}) \\ & + \frac{K}{4}h_j(v_j + v_{j-1})^2 = (R_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\frac{1}{Pr}(t_j - t_{j-1}) + \frac{h_j}{4}(f_j + f_{j-1})(t_j - t_{j-1}) = (R_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (4.44)$$

Dengan

$$(R_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = -\frac{h_j}{\cos \theta_s}$$

$$(R_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = 0$$

Menggunakan Metode Newton. Dengan bentuk iterasi metode Newton sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\ u_j^{(i+1)} &= u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} \\ v_j^{(i+1)} &= v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)} \\ w_j^{(i+1)} &= w_j^{(i)} + \delta w_j^{(i)} \\ s_j^{(i+1)} &= s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} \\ t_j^{(i+1)} &= t_j^{(i)} + \delta t_j^{(i)} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Selanjutnya disubstitusi ke dalam bentuk iterasi (4.45) pada sistem Persamaan (4.39)-(4.44), ke dalam bentuk sederhana dengan menghilangkan orde tinggi pada $(\delta f_j^{(i)}, \delta u_j^{(i)}, \delta v_j^{(i)}, \delta w_j^{(i)}, \delta s_j^{(i)}, \delta t_j^{(i)})$ maka didapatkan

$$(\delta f_j^n - \delta f_{j-1}^n) - \frac{h_j}{2} (\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n) = (r_1)_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.46)$$

$$(\delta u_j^n - \delta u_{j-1}^n) - \frac{h_j}{2} (\delta v_j^n + \delta v_{j-1}^n) = (r_2)_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.47)$$

$$(\delta v_j^n - \delta v_{j-1}^n) - \frac{h_j}{2} (\delta w_j^n + \delta w_{j-1}^n) = (r_3)_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.48)$$

$$(\delta s_j^n - \delta s_{j-1}^n) - \frac{h_j}{2} (\delta t_j^n + \delta t_{j-1}^n) = (r_4)_{j-\frac{1}{2}} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_1 \delta w_j^n + (a_2)_1 \delta w_{j-1}^n + (a_3)_1 \delta v_j^n + (a_4)_1 \delta v_{j-1}^n \\ & + (a_5)_1 \delta f_j^n + (a_6)_1 \delta f_{j-1}^n + (a_7)_1 \delta u_j^n \\ & + (a_8)_1 \delta u_{j-1}^n + (a_9)_1 \delta s_j^n + (a_{10})_1 \delta s_{j-1}^n \\ & = (r_5)_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}
(b_1)_j \delta t_j^n + (b_2)_j \delta t_{j-1}^n + (b_3)_j \delta f_j^n + (b_4)_j \delta f_{j-1}^n \\
= (r_6)_j
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Dengan

$$\begin{aligned}
(r_1)_j &= (\delta f_j^n - \delta f_{j-1}^n) - \frac{h_j}{2} (\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n) \\
(r_2)_j &= (\delta u_j^n - \delta u_{j-1}^n) - \frac{h_j}{2} (\delta v_j^n + \delta v_{j-1}^n) \\
(r_3)_j &= (\delta v_j^n - \delta v_{j-1}^n) - \frac{h_j}{2} (\delta w_j^n + \delta w_{j-1}^n) \\
(r_4)_j &= (\delta s_j^n - \delta s_{j-1}^n) - \frac{h_j}{2} (\delta t_j^n + \delta t_{j-1}^n) \\
(r_5)_j &= -w_{j-\frac{1}{2}}^n - (f)_{j-\frac{1}{2}}^n (v)_{j-\frac{1}{2}}^n + \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n\right)^2 - \frac{1}{\cos \theta_s} \\
&\quad - \frac{\lambda}{\cos \theta_s} s_{j-\frac{1}{2}}^n + 2K(u)_{j-\frac{1}{2}}^n (w)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \\
&\quad - K(f)_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{w_j^n - w_{j-1}^n}{h_j}\right) \\
&\quad - K\left(v_{j-\frac{1}{2}}^n\right)^2 + R_1 \\
(r_6)_j &= \frac{1}{Pr} \left(\frac{t_j^n - t_{j-1}^n}{h_j}\right) - (f)_{j-\frac{1}{2}}^n (t)_{j-\frac{1}{2}}^n + R_2 \\
(a_1)_j &= \frac{h_j}{2} + K u_{j-\frac{1}{2}}^n - K f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_2)_j &= \frac{h_j}{2} - K h_j u_{j-\frac{1}{2}}^n - K f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_3)_j &= \frac{h_j}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^n - K h_j v_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_4)_j &= (a_3)_j
\end{aligned}$$

$$(a_5)_j = \frac{h_j}{2} \mathcal{W}_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{K}{2} \mathcal{W}_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_6)_j = (a_5)_j$$

$$(a_7)_j = -h_j \mathcal{U}_{j-\frac{1}{2}}^n - K h_j \mathcal{W}_j$$

$$(a_8)_j = (a_7)_j$$

$$(a_9)_j = \frac{\lambda}{\cos \theta_s} \frac{h_j}{2}$$

$$(a_{10})_j = (a_9)_j$$

$$(b_1)_j = \frac{1}{2Pr} + \frac{1}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2}$$

$$(b_2)_j = -(b_1)_j$$

$$(b_3)_j = \frac{1}{2} \mathcal{T}_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2}$$

$$(b_4)_j = -(b_3)_j$$

Dengan R_1 dan R_2 yang sudah dijelaskan pada lampiran, yaitu:

$$\begin{aligned} R1 = & -\mathcal{W}_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - (f\mathcal{V})_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \left(\mathcal{U}_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 - \frac{1}{\cos \theta_s} - \frac{\lambda}{\cos \theta_s} \mathcal{S}_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ & + K \left(2(\mathcal{U}\mathcal{W})_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \left(\frac{\mathcal{W}_j^{n-1} - \mathcal{W}_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{h_j} \right) \right. \\ & \left. - \left(\mathcal{V}_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$R1 = \frac{1}{\cos \theta_s}$$

$$R2 = -\frac{1}{Pr} \left(\frac{\mathcal{T}_j^{n-1} - \mathcal{T}_{j-1}^{n-1}}{h_j} \right) - (f\mathcal{T})_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$R2 = 0$$

4.3.3 Teknik Eliminasi Blok

Sistem linier pada Persamaan (4.39)-(4.44) diselesaikan menggunakan teknik eliminasi blok (Na, 1979). Struktur tridiagonal blok yang terdiri dari elemen-elemen yang berupa variabel atau konstanta. Sedangkan pada metode Keller-Box, elemen-elemen dari blok tridiagonal berupa matriks blok. Sehingga terlebih dahulu dibutuhkan penentuan elemen-elemen dari matriks blok trididagonal dari sistem linier Persamaan (4.39)-(4.44) dengan cara dibentuk tiga keadaan yaitu saat $j = 1, j = N - 1$, dan $j = N$.

Keadaan 1 saat $j = 1$, maka Persamaan (4.39)-(4.44) menjadi

$$(\delta f_1^n - \delta f_0^n) - \frac{h_1}{2}(\delta f_1^n + \delta f_0^n) = (r_1)_{1-\frac{1}{2}}$$

$$(\delta u_1^n - \delta u_0^n) - \frac{h_1}{2}(\delta u_1^n + \delta u_0^n) = (r_2)_{1-\frac{1}{2}}$$

$$(\delta v_1^n - \delta v_0^n) - \frac{h_1}{2}(\delta v_1^n + \delta v_0^n) = (r_3)_{1-\frac{1}{2}}$$

$$(\delta s_1^n - \delta s_0^n) - \frac{h_1}{2}(\delta s_1^n + \delta s_0^n) = (r_4)_{1-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_1 \delta w_1^n + (a_2)_1 \delta w_0^n + (a_3)_1 \delta v_1^n + (a_4)_1 \delta v_0^n \\ & + (a_5)_1 \delta f_1^n + (a_6)_1 \delta f_0^n + (a_7)_1 \delta u_1^n \\ & + (a_8)_1 \delta u_0^n + (a_9)_1 \delta s_1^n + (a_{10})_1 \delta s_0^n \\ & = (r_5)_{1-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$(b_1)_1 \delta t_1^n + (b_2)_1 \delta t_0^n + (b_3)_1 \delta f_1^n + (b_4)_1 \delta f_0^n = (r_6)_{1-\frac{1}{2}}$$

Dimisalkan $d_1 = -\frac{h_1}{2}$ dan $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta s_0 = 1$ maka sistem diatas dapat dibentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & d_1 \\ -1 & d_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (a_4)_1 & (a_2)_1 & 0 & (a_5)_1 & (a_1)_1 & 0 \\ 0 & 0 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & 0 & (b_1)_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta w_0 \\ \delta t_0 \\ \delta f_1 \\ \delta v_1 \\ \delta t_1 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (a_7)_1 & (a_3)_1 & (a_9)_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b_1)_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \\ \delta s_1 \\ \delta f_2 \\ \delta w_2 \\ \delta t_2 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} (r_1)_{1-(1/2)} \\ (r_2)_{1-(1/2)} \\ (r_3)_{1-(1/2)} \\ (r_4)_{1-(1/2)} \\ (r_5)_{1-(1/2)} \\ (r_6)_{1-(1/2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pada keadaan pertama dapat ditulis sebagai berikut:

$$[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$$

Keadaan 2 saat $j = j - 1$, maka Persamaan (4.39)-(4.44) menjadi

$$(\delta f_{j-1}^n - \delta f_{j-2}^n) - \frac{h_{j-1}}{2}(\delta f_{j-1}^n + \delta f_{j-2}^n) = (r_1)_{(j-1)-(1/2)}$$

$$(\delta u_{j-1}^n - \delta u_{j-2}^n) - \frac{h_{j-1}}{2}(\delta v_{j-1}^n + \delta v_{j-2}^n) = \\ (r_2)_{(j-1)-(1/2)}$$

$$(\delta v_{j-1}^n - \delta v_{j-2}^n) - \frac{h_{j-1}}{2}(\delta w_{j-1}^n + \delta w_{j-2}^n) = \\ (r_4)_{(j-1)-(1/2)}$$

$$(\delta s_{j-1}^n - \delta s_{j-2}^n) - \frac{h_{j-1}}{2}(\delta t_{j-1}^n + \delta t_{j-2}^n) = (r_3)_{(j-1)-(1/2)}$$

$$(a_1)_{j-1}\delta w_{j-1}^n + (a_2)_{j-1}\delta w_{j-2}^n + (a_3)_{j-1}\delta v_{j-1}^n + \\ (a_4)_{j-1}\delta v_{j-2}^n + (a_5)_{j-1}\delta f_{j-1}^n + (a_6)_{j-1}\delta f_{j-2}^n + \\ (a_7)_{j-1}\delta u_{j-1}^n + (a_8)_{j-1}\delta u_{j-2}^n + (a_9)_{j-1}\delta s_{j-1}^n + \\ (a_{10})_{j-1}\delta s_{j-2}^n = (r_5)_{(j-1)-(1/2)}$$

$$(b_1)_{j-1}\delta t_{j-1}^n + (b_2)_{j-1}\delta t_{j-2}^n + (b_3)_{j-1}\delta f_{j-1}^n + \\ (b_4)_{j-1}\delta f_{j-2}^n = (r_6)_{(j-1)-(1/2)}$$

Dapat dinyatakan dalam bentuk matrik yaitu

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{j-1} \\ 0 & 0 & 0 & (a_6)_{j-1} & (a_2)_{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b_4)_{j-1} & 0 & (b_2)_{j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{j-3} \\ \delta v_{j-3} \\ \delta s_{j-3} \\ \delta f_{j-2} \\ \delta w_{j-2} \\ \delta t_{j-2} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} d_{j-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & d_{j-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & d_{j-1} & 0 \\ 0 & d_{j-1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (a_8)_{j-1} & (a_4)_{j-1} & (a_{10})_{j-1} & (a_5)_{j-1} & (a_1)_{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b_3)_{j-1} & 0 & (b_1)_{j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{j-2} \\ \delta v_{j-2} \\ \delta s_{j-2} \\ \delta f_{j-1} \\ \delta w_{j-1} \\ \delta t_{j-1} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} d_{j-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_{j-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_7)_{j-1} & (a_3)_{j-1} & (a_9)_{j-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{j-1} \\ \delta v_{j-1} \\ \delta s_{j-1} \\ \delta f_j \\ \delta w_j \\ \delta t_j \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} (r_1)_{(j-1)-(1/2)} \\ (r_2)_{(j-1)-(1/2)} \\ (r_3)_{(j-1)-(1/2)} \\ (r_4)_{(j-1)-(1/2)} \\ (r_5)_{(j-1)-(1/2)} \\ (r_6)_{(j-1)-(1/2)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Pada keadaan kedua dapat ditulis sebagai berikut

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$$

Keadaan 3 saat $j = J$, maka Persamaan (4.39)-(4.44) menjadi

$$(\delta f_j^n - \delta f_{j-1}^n) - \frac{h_j}{2}(\delta j_j^n + \delta j_{j-1}^n) = (r_1)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(\delta u_j^n - \delta u_{j-1}^n) - \frac{h_j}{2}(\delta v_j^n + \delta v_{j-1}^n) = (r_2)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(\delta v_j^n - \delta v_{j-1}^n) - \frac{h_j}{2}(\delta w_j^n + \delta w_{j-1}^n) = (r_3)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$(\delta s_j^n - \delta s_{j-1}^n) - \frac{h_j}{2}(\delta t_j^n + \delta t_{j-1}^n) = (r_4)_{j-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} & (a_1)_j \delta w_j^n + (a_2)_j \delta w_{j-1}^n + (a_3)_j \delta v_j^n + (a_4)_j \delta v_{j-1}^n + \\ & (a_5)_j \delta f_j^n + (a_6)_j \delta f_{j-1}^n + (a_7)_j \delta u_j^n + (a_8)_j \delta u_{j-1}^n + \\ & (a_9)_j \delta s_j^n + (a_{10})_j \delta s_{j-1}^n = (r_5)_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (b_1)_j \delta t_j^n + (b_2)_j \delta t_{j-1}^n + (b_3)_j \delta f_j^n + (b_4)_j \delta f_{j-1}^n = \\ & (r_6)_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Dapat dinyatakan dalam bentuk matrik yaitu

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a_8)_J & (a_2)_J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b_4)_J & 0 & (b_2)_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{j-2} \\ \delta v_{j-2} \\ \delta s_{j-2} \\ \delta f_{j-1} \\ \delta w_{j-1} \\ \delta t_{j-1} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} d_j & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & d_j & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & d_j \\ 0 & d_j & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (a_8)_J & (a_4)_J & (a_{10})_J & (a_5)_J & (a_1)_J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b_3)_J & 0 & (b_1)_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{j-1} \\ \delta v_{j-1} \\ \delta s_{j-1} \\ \delta f_j \\ \delta w_j \\ \delta t_j \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} (r_1)_{j-(1/2)} \\ (r_2)_{j-(1/2)} \\ (r_3)_{j-(1/2)} \\ (r_4)_{j-(1/2)} \\ (r_5)_{j-(1/2)} \\ (r_6)_{1-(1/2)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sehingga, untuk semua nilai $j = J$, kita memiliki $[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]$

Adapun untuk semua $j = 1, 2, 3, \dots, J-1, J$ dapat kita sederhanakan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}
j = 1 & : [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1] \\
j = 2 & : [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [r_2] \\
j = 3 & : [B_3][\delta_2] + [A_3][\delta_3] + [C_3][\delta_4] = [r_3] \\
& \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$j = J - 1 : [B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$$

$$j = J : [B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{A}\delta = \mathbf{r} \quad (4.52)$$

Dimana

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [A_1] & [C_1] & & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & [B_{J-1}] & [A_{J-1}] & [C_{J-1}] \\ & & & & & [B_J] & [A_J] \end{bmatrix}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{J-1}] \\ [\delta_J] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ \vdots \\ [r_{J-1}] \\ [r_J] \end{bmatrix}$$

Dengan elemen matriks sebagai berikut:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & d_1 \\ -1 & d_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (a_4)_1 & (a_2)_1 & 0 & (a_5)_1 & (a_1)_1 & 0 \\ 0 & 0 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & 0 & (b_1)_1 \end{bmatrix}$$

$$[A_j] = \begin{bmatrix} d_j & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & d_j & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & d_j \\ 0 & d_j & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (a_8)_J & (a_4)_J & (a_{10})_J & (a_5)_J & (a_1)_J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b_3)_J & 0 & (b_1)_J \end{bmatrix}$$

$$2 \leq j \leq J$$

$$[B_j] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{j-1} \\ 0 & 0 & 0 & (a_6)_{j-1} & (a_2)_{j-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b_4)_{j-1} & 0 & (b_2)_{j-1} \end{bmatrix}$$

$$2 \leq j \leq J$$

$$[C_j] = \begin{bmatrix} d_{j-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_{j-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_7)_{j-1} & (a_3)_{j-1} & (a_9)_{j-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1 \leq j \leq J-1$$

$$[\delta_1] = \begin{bmatrix} \delta v_0 \\ \delta w_0 \\ \delta s_0 \\ \delta f_1^n \\ \delta v_1^n \\ \delta t_1^n \end{bmatrix}; [\delta_j] = \begin{bmatrix} \delta u_{j-1} \\ \delta w_{j-1} \\ \delta s_{j-1} \\ \delta f_j \\ \delta v_j \\ \delta t_j \end{bmatrix}; [r_j] = \begin{bmatrix} (r_1)_{j-\frac{1}{2}}^n \\ (r_2)_{j-\frac{1}{2}}^n \\ (r_3)_{j-\frac{1}{2}}^n \\ (r_4)_{j-\frac{1}{2}}^n \\ (r_5)_{j-\frac{1}{2}}^n \\ (r_6)_{j-\frac{1}{2}}^n \end{bmatrix}; 2 \leq j \leq J$$

Dari Persamaan (4.52) matriks A merupakan matriks tridiagonal yang seluruh elemennya bernilai nol kecuali 3 diagonal utamanya yang elemennya merupakan matriks blok. Sehingga Persamaan matriks (4.36) dapat diselesaikan menggunakan teknik eliminasi blok (Na, 1979) dengan matriks A dapat difaktorkan menjadi

$$A = LU \quad (4.53)$$

Dengan

$$L = \begin{bmatrix} [\alpha_1] & & & & \\ [B_2] & [\alpha_2] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [\alpha_{j-1}] & \\ & & & [B_j] & [\alpha_j] \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} [I] & [\Gamma_1] & & & & \\ & [I] & [\Gamma_2] & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & [I] & [\Gamma_{j-1}] \\ & & & & & [I] \end{bmatrix}$$

Dimana $[I]$ merupakan matriks identitas dengan ukuran 6×6 dan $[\Gamma_1]$ adalah matriks berukuran 6×6 yang elemennya ditentukan oleh persamaan berikut:

$$[\alpha_1] = [A_1]$$

$$[\alpha_1][\Gamma_1] = [C_1]$$

$$[\alpha_j] = [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], \quad j = 2, 3, \dots, J$$

$$[\alpha_j][\Gamma_j] = [C_j], \quad j = 2, 3, \dots, J - 1$$

Subtitusikan Persamaan (4.53) ke Persamaan (4.52) maka akan diperoleh

$$\mathbf{LU}\delta = \mathbf{r} \quad (4.54)$$

Dengan mendefinisikan bahwa

$$\mathbf{U}\delta = \mathbf{W} \quad (4.55)$$

Maka Persamaan (4.55) menjadi

$$\mathbf{LW} = \mathbf{r} \quad (4.56)$$

Dengan

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} [\mathbf{W}_1] \\ [\mathbf{W}_2] \\ \vdots \\ [\mathbf{W}_{J-1}] \\ [\mathbf{W}_J] \end{bmatrix}$$

Dengan $[\mathbf{W}_j]$ merupakan matriks berukuran 6×1 yang elemen-elemennya diperoleh dari Persamaan (4.56) yaitu:

$$[\alpha_1][\mathbf{W}_1] = [r_1]$$

$$[\alpha_j][\mathbf{W}_j] = [r_j] - [B_j][\mathbf{W}_{j-1}], \quad 2 \leq j \leq J$$

Setelah didapatkan elemen-elemen dari matriks \mathbf{W} selanjutnya dapat ditentukan penyelesaian dari δ dengan persamaan sebagai berikut:

$$[\delta_j] = [\mathbf{W}_j]$$

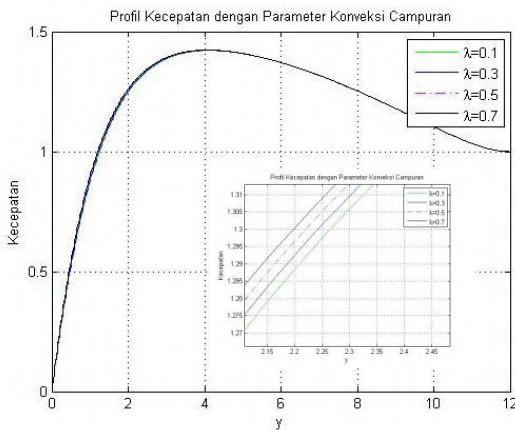
$$[\delta_j] = [\mathbf{W}_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq J-1$$

Dengan didapatkan nilai δ maka Persamaan (4.46)-(4.51) dapat digunakan untuk melakukan iterasi sampai memenuhi kriteria konvergen. Menurut Cebeci dan Bradshaw, kriteria konvergen menggunakan $v(0, t)$ dan iterasi berhenti saat didapatkan $|\delta v(0, t)| < \varepsilon$, dan pada penelitian ini digunakan $\varepsilon = 10^{-5}$ yang memberikan nilai presisi sampai empat desimal (Cebeci and Bradshaw, 1988).

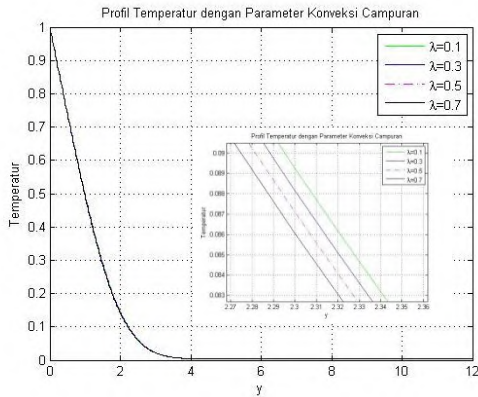
4.4 Hasil Simulasi Numerik

Setelah dilakukan penyelesaian numerik, dilakukan simulasi menggunakan Matlab. Grafik yang dihasilkan menunjukkan pengaruh dari variasi nilai parameter konveksi campuran (λ), parameter viskoelastis (K), bilangan Prandtl (pr), dan variasi sudut (θ_s) terhadap profil kecepatan (f') dan profil temperatur (θ). Pada perhitungan numerik, menggunakan $\Delta y = 0.02$.

4.4.1 Pengaruh Parameter Konveksi Campuran



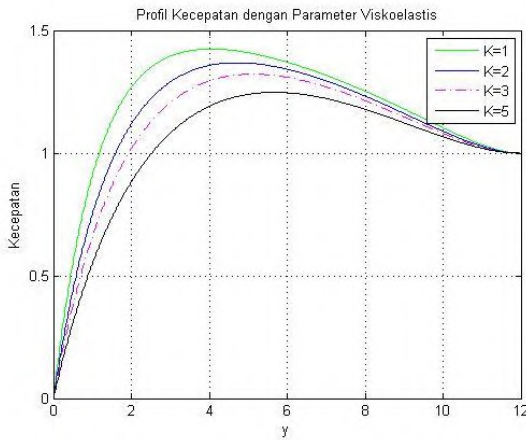
Gambar 4.2: Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Konveksi Campuran



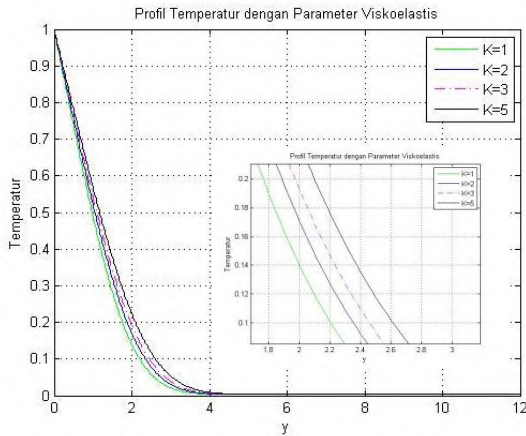
Gambar 4.3: Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Konveksi Campuran

Pada simulasi ini diketahui profil kecepatan dan profil temperatur pada fluida dengan variasi konveksi campuran yaitu $\lambda = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ dengan nilai $Pr = 1, K = 1$ dan $\theta_s = 30$. Dijelaskan bahwa semakin meningkat parameter konveksi campuran maka profil kecepatan semakin besar, hal tersebut dikarenakan pengaruh gaya luar sehingga menyebabkan kecepatan aliran konveksi fluida semakin besar. Hal ini telah memenuhi teori pada konveksi campuran karena semakin besar parameter konveksi campuran menyebabkan semakin besarnya konveksi paksa (*forced convection*) yang bekerja pada fluida tersebut.

4.4.2 Pengaruh Parameter Viskoelastis (K)



Gambar 4.4 Profil Kecepatan Variasi Parameter Viskoelastis (k)

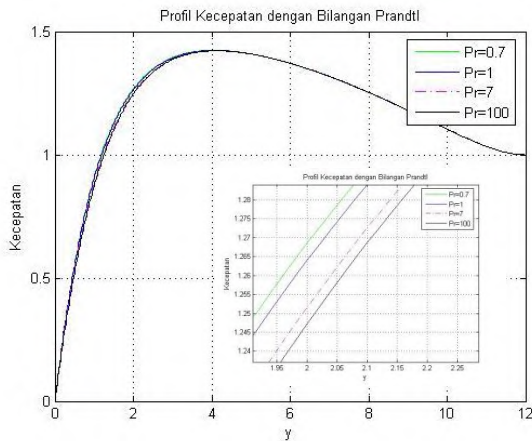


Gambar 4.5 Profil Temperatur Variasi Parameter Viskoelastis (K)

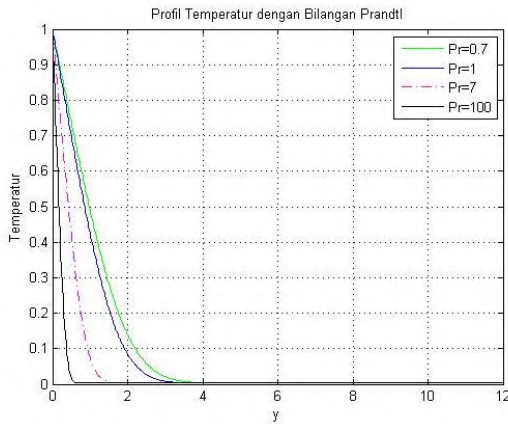
Pada Gambar 4.4 dan 4.5 diilustrasikan mengenai profil kecepatan dan profil temperatur aliran fluida viskoelastis dengan variasi parameter viskoelastis $K = 1, 2, 3, 5$, $\lambda = 1$, $Pr = 1$ dan

$\theta_s = 30$. Terlihat bahwa profil kecepatan semakin melambat dengan peningkatan nilai parameter viskoelastis yang menyebabkan kecepatannya semakin menurun dan profil temperaturnya semakin meningkat. Hal ini dapat dipahami bahwa pergerakan suatu fluida menjadi lebih lambat jika fluida tersebut memiliki kelestisan yang tinggi dan keelastisan fluida dapat meningkatkan profil distribusi temperatur dari suatu fluida.

4.4.3 Pengaruh Parameter Bilangan Prandtl



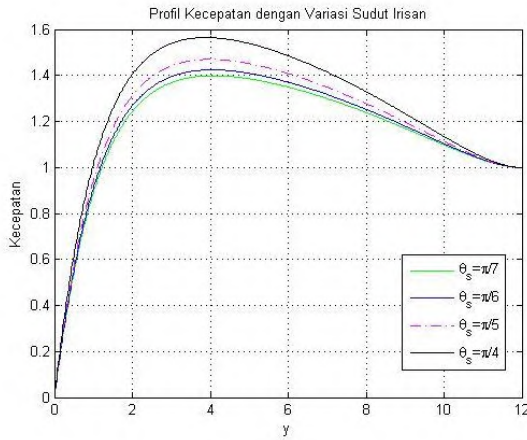
Gambar 4.6 Profil Kecepatan dengan Variasi Bilangan Prandtl (Pr)



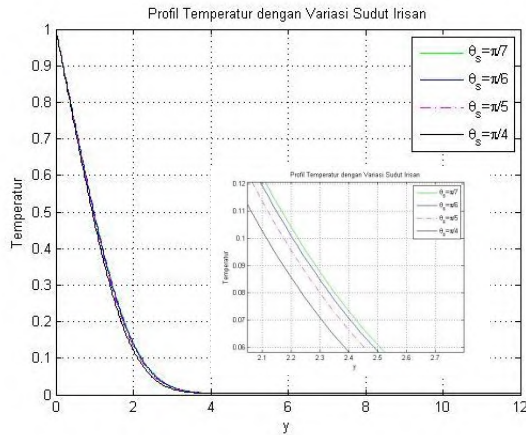
Gambar 4.7 Profil Temperatur dengan Variasi Bilangan Prandtl (Pr)

Pengaruh dari variasi bilangan Prandtl (Pr) terhadap profil kecepatan dan profil temperatur pada Gambar 4.6 dan 4.7 dengan menggunakan variasi bilangan Prandtl $Pr = 0.7, 1, 7, 100$, $\lambda = 1$, $K = 1$ dan $\theta_s = 30$. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin meningkatnya nilai bilangan Prandtl, maka menyebabkan profil kecepatan dan profil temperatur pada fluida yang melewati silinder teriris semakin kecil. Hal ini menunjukkan kesamaan dengan definisi dari bilangan Prandtl. Dengan semakin meningkatnya nilai dari bilangan Prandtl berpengaruh besar pada viskositas kinematik dan difusivitas panas dari fluida. Pada saat viskositas kinematik nilainya semakin besar, maka kecepatan suatu fluida semakin lambat. Sedangkan saat difusivitas panas nilainya semakin kecil menyebabkan temperatur panas suatu fluida semakin kecil karena difusivitas panas adalah koefisien panas.

4.4.4 Pengaruh Variasi Sudut Irisan



Gambar 4.8 Profil Kecepatan dengan Variasi Sudut Irisan (θ_s)



Gambar 4.9 Profil Temperatur dengan Variasi Sudut Irisan (θ_s)

Pada Gambar 4.8 dan 4.9 dengan menggunakan sudut irisan $\theta_s = \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}$, $\lambda = 1, K = 1$ dan $Pr = 1$. Dapat dilihat bahwa semakin besar sudut irisan maka kecepatan suatu fluida semakin

besar. Hal ini dikarenakan semakin besar sudut pengirisan letak titik stagnasi semakin keatas akan mengalami kenaikan seiring dengan naiknya sudut pengirisan.

LAMPIRAN

1. Perhitungan persamaan pembangun Non-dimensional

Dengan mensubstitusi variabel non-dimensional ke dalam persamaan pembangun dimensional maka didapat persamaan pembangun non-dimensional sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ &\quad - \frac{k_0}{\rho} \left[\bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{V} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] \\ &\quad + g\beta(T - T_\infty) \tan\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right) \\ \bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} &= \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2}\end{aligned}$$

Dengan kondisi batas sebagai berikut:

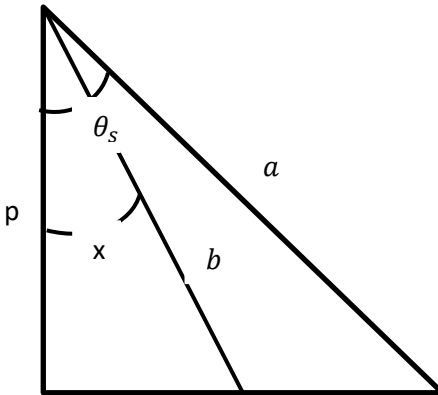
$$\bar{u} = \bar{v} = 0, T = T_w, \text{ untuk } \bar{y} = r0,$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e(x), \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0, T = T_\infty, \text{ untuk } y \rightarrow \infty$$

Dengan variabel non-dimensional sebagai berikut:

$$\begin{aligned}x &= \frac{\bar{x}}{a}, y = Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\bar{y}}{a} \right), u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, \\ V &= Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\bar{V}}{U_\infty} \right), U_e = \frac{\bar{u}_e(\bar{x})}{U_\infty}, \theta = \frac{(T - T_\infty)}{(T_w - T_\infty)}, Re \\ &= \frac{U_\infty a}{\nu}\end{aligned}$$

Komponen x Datar



Dapat diketahui bahwa:

$$\cos x = \frac{p}{b}$$

$$p = b \cos x$$

Sedangkan

$$\cos \theta_s = \frac{p}{a}$$

$$p = a \cos \theta_s$$

Dengan demikian didapat:

$$\bar{b} = \frac{\cos \theta_s}{\cos x} a, \quad b = \frac{\cos \theta_s}{\cos x}$$

Komponen x merupakan *free stream* didefinisikan dengan

$$\bar{u}_e = U_\infty \sin \left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}} \right)$$

$$\bar{u}_e = U_\infty \sin \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)$$

Bentuk non-dimensional dari u_e adalah

$$\frac{\partial u_e}{\partial x} = \cos \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \left(\frac{\cos x}{\cos \theta_s} - \frac{x \sin x}{\cos \theta_s} \right)$$

Dengan menurunkan g_x dan g_y sebagai berikut:

$$\cos\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right) = \frac{g}{g_x}$$

$$g_{\bar{y}} = \frac{g}{\cos\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right)}$$

$$\tan\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right) = \frac{g_{\bar{x}}}{g}$$

$$g_{\bar{x}} = g \tan\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right)$$

Kemudian substitusikan nilai b menjadi bentuk dimensional bentuk $g_{\bar{x}}$ dan $g_{\bar{y}}$ menjadi

$$g_{\bar{y}} = \frac{g}{\cos\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right)}$$

$$= \frac{g}{\cos\left(\frac{ax}{ab}\right)}$$

$$= \frac{g}{\cos\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)}$$

$$g_{\bar{x}} = g \tan\left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}}\right)$$

$$= g \tan\left(\frac{ax}{ab}\right)$$

$$= g \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)$$

Persamaan Kontinuitas

Perhitungan persamaan kontinuitas adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\frac{\partial(u U_\infty)}{\partial(ax)} + \frac{\partial\left(\frac{\mathbf{V} U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)}{\partial\left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\frac{1}{Re^{\frac{1}{2}}} \partial \mathbf{V}}{\frac{1}{a}} = 0$$

$$\frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \right) = 0$$

Sehingga didapat persamaan kontinuitas non-dimensional sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} = 0$$

Persamaan Momentum

Diperoleh persamaan momentum dimensional sebagai berikut:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{V}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

$$- \frac{k_0}{\rho} \left[\bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{\mathbf{V}} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right]$$

$$+ g\beta(T - T_\infty) \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)$$

Perhitungan pada ruas kiri:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{V}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = (u U_\infty) \frac{\partial(u U_\infty)}{\partial(ax)} + \left(\frac{\mathbf{V} U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{\partial(u U_\infty)}{\partial\left(\frac{a y}{e^{\frac{1}{2}}}\right)}$$

$$= \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{Re^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a}{Re^{\frac{1}{2}}}} \mathbf{V} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{a} \mathbf{V} \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= \frac{U_\infty^2}{a} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{V} \frac{\partial u}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kanan:

$$\begin{aligned}
&= \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}} + v \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right. \\
&\quad - \frac{k_0}{\rho} \left[\bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{\mathbf{V}} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] + g\beta(T - T_\infty) \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \right) \\
&= u_e U_\infty \frac{\partial u_e U_\infty}{\partial(ax)} + v \left(\frac{\partial^2(u U_\infty)}{\partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)} \right. \\
&\quad - \frac{k_0}{\rho} \left[(u U_\infty) \frac{\partial^3(u U_\infty)}{\partial(ax) \partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)} \right. \\
&\quad + \left(\frac{\mathbf{V} U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{\partial^3(u U_\infty)}{\partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^3} - \frac{\partial(u U_\infty)}{\partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)} \frac{\partial^2(u U_\infty)}{\partial(ax) \partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)} \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial(u U_\infty)}{\partial(ax)} \frac{\partial^2(u U_\infty)}{\partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \right] \right) \\
&\quad + g\beta(T_w - T_\infty) \theta \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(U_\infty)^2}{a} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{U_\infty Re}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&\quad - \frac{k_0}{\rho} \left[\left(\frac{U_\infty^2 Re}{a^3} \right) u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \left(\frac{U_\infty^2}{Re^{\frac{1}{2}}} \frac{Re^{\frac{1}{2} Re}}{a^3} \right) \mathbf{V} \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{U_{inf ty}^2}{a} \frac{\left(Re^{\frac{1}{2}} \right)^2}{a^2} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{U_\infty}{a} \frac{U_\infty Re}{a^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\
&\quad + g\beta(T_w - T_\infty)\theta \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right) \\
&= \frac{(U_\infty)^2}{a} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{U_\infty Re}{a^2} v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&\quad - \left(\frac{U_\infty Re}{a^3} \right) \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \mathbf{V} \partial^3 \frac{u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + g\beta(T_w - T_\infty)\theta \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)
\end{aligned}$$

Sehingga didapat penyederhanaan dari kedua ruas sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \frac{U_\infty^2}{a} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{V} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
&= \frac{(U_\infty)^2}{a} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{U_\infty Re}{a^2} v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&\quad - \frac{\left(\frac{U_\infty^2 Re}{a^3} \right) k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \mathbf{V} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + g\beta(T_w - T_\infty)\theta \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right) \\
u \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{V} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{a}{U_\infty^2} \left[\frac{(U_\infty)^2}{a} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{U_\infty Re}{a^2} v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{U_\infty^2 Re}{a^3} \right) \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \mathbf{V} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + g\beta(T_w - T_\infty)\theta \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right) \right] \\
u \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{V} \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{Re}{U_\infty a} v \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} \\
&\quad - \frac{Re k_0}{a^2 \rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \mathbf{V} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{a}{U_\infty} g\beta(T_w - T_\infty)\theta \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{U_\infty a}{U_\infty a} v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&\quad - \frac{U_\infty a}{a^2} \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + V \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{a}{U_\infty^2} g\beta(T_w - T_\infty)\theta \sin x \\
u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&\quad - \frac{U_\infty k_0}{av} \frac{\rho}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + V \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{a}{U_\infty^2} g\beta(T_w - T_\infty)\theta \tan\left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s}\right)
\end{aligned}$$

Diberikan parameter non-dimensional sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{k_0 U_\infty}{a \rho v} \\
Pr &= \frac{v}{\alpha} \\
\lambda &= \frac{Gr}{Re^2}
\end{aligned}$$

Dengan $Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{v^2}$, maka diperoleh:

$$\lambda = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{U_\infty^2}$$

Persamaan momentum disederhankan menjadi:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&\quad - K \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + V \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\
&\quad + \lambda \theta \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
\end{aligned}$$

Dengan $u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$

Maka didapat persamaan momentum non-dimensional sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&\quad - K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + V \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \\
&\quad + \lambda \theta \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
\end{aligned}$$

Persamaan Energi

Perhitungan pada ruas kiri:

$$\begin{aligned}
\bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} &= (u U_\infty) \frac{\partial ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial(ax)} \\
&\quad + \left(V \frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{\partial ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)} \\
&= \frac{U_\infty}{a} u \frac{\partial ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial x} \\
&\quad + \frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a}{Re^{\frac{1}{2}}}} V \frac{\partial ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$= \frac{U_{\infty}}{a} \left(u \frac{\partial((T_w - T_{\infty})\theta + T_{\infty})}{\partial x} + v \frac{\partial((T_w - T_{\infty})\theta + T_{\infty})}{\partial y} \right)$$

Perhitungan pada ruas kanan:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} &= \alpha \frac{\partial^2((T_w - T_{\infty})\theta + T_{\infty})}{\partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \\ &= \frac{\alpha}{\left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \frac{\partial^2((T_w - T_{\infty})\theta + T_{\infty})}{\partial y^2} \\ &= \frac{\alpha \left(Re^{\frac{1}{2}} \right)^2}{(a)^2} \left(\frac{\partial^2((T_w - T_{\infty})\theta + T_{\infty})}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Dengan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial((T_w - T_{\infty})\theta + T_{\infty})}{\partial x} &= \frac{\partial((T_w - T_{\infty})\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(T_{\infty})}{\partial x} \\ \frac{\partial((T_w - T_{\infty})\theta + T_{\infty})}{\partial y} &= \frac{\partial((T_w - T_{\infty})\theta)}{\partial y} + \frac{\partial T_{\infty}}{\partial y} \\ \frac{\partial^2((T_w - T_{\infty})\theta + T_{\infty})}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial((T_w - T_{\infty})\theta)}{\partial y} + \frac{\partial(T_{\infty})}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

T_{∞} adalah konstan, jadi diturunkan terhadap x maupun y bernilai nol.

$$\begin{aligned} \frac{U_{\infty}}{a} (T_w - T_{\infty}) \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= \frac{\alpha \left(Re^{\frac{1}{2}} \right)^2}{a^2} (T_w - T_{\infty}) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\ \frac{U_{\infty}}{a} \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= \frac{\alpha \left(Re^{\frac{1}{2}} \right)^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{a}{U_\infty} \frac{\alpha \left(Re^{\frac{1}{2}} \right)^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\alpha Re}{a U_\infty} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)$$

Dengan mensubstitusikan $Re = \left(\frac{U_\infty a}{\nu} \right)$ maka didapatkan:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\alpha \frac{U_\infty a}{\nu}}{a U_\infty} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\alpha}{\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

Diberikan parameter non-dimensional $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ sehingga didapatkan persamaan energi non-dimensional sebagai berikut:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

2. Perhitungan Persamaan Similiaritas

Diperoleh persamaan pembangun non-dimensional sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$- K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + V \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]$$

$$+ \lambda \theta \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

Persamaan pembangun non-dimensional tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan similiaritas. Diasumsikan $u_e = \sin \frac{x}{b}$ dan variabel similiaritas untuk silinder teriris sebagai berikut:

$$\psi = xf(x, y)$$

$$\theta = \theta(x, y)$$

Dengan ψ adalah *stream function* yang didefinisikan sebagai berikut:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Persamaan kontinuitas

Untuk perhitungan persamaan kontinuitas non-dimensional adalah dengan mensubstitusikan variabel similiaritas, yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

Dari penyederhanaan tersebut, persamaan kontinuitas bernilai nol sehingga dapat diabaikan.

Persamaan Momentum

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 &\quad - K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + V \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \\
 &\quad + \lambda \theta \sin x \\
 \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \\
 &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \\
 &\quad - K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \right) \right) \right) \\
 &\quad - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \right) \right) \right) \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \right) \right] \\
 &\quad + \lambda \theta \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\
& = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \\
& - K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) \right] + \lambda \theta \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
\end{aligned}$$

Dengan:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial y} &= x \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}; \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = x \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= f + x \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}
\end{aligned}$$

Sehingga didapat persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& x \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) - \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \\
&\quad - K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(x \frac{\partial f}{\partial y} \right) \left(x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right) \right) \right. \\
&\quad - \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(x \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) \\
&\quad \left. - \left(x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \\
&\quad + \lambda \theta \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \\
& x \left(\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + a \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) - \left(f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right) \right) \\
&= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \\
&\quad - K \left[2x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x^2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} \right. \\
&\quad - x f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \\
&\quad \left. - x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] + \lambda \theta \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) - \left(f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{x} \left(u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \right) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \\
&- K \left[2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} \right. \\
&- \left. f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 - x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] \\
&+ \frac{1}{x} \lambda \theta \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan persamaan momentum similiar sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{1}{x} \left(u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \right) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&- K \left[2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right] \\
&- Kx \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right. \\
&- \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] + \frac{1}{x} \lambda \theta \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)
\end{aligned}$$

Persamaan Energi

Persamaan energi non-dimensional akan ditransformasikan ke dalam persamaan similiaritas dengan gaya yang sama, yaitu:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial (\theta(x, y))}{\partial x} + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \right)$$

$$x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

$$x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - f \frac{\partial \theta}{\partial y} - x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

Sehingga didapatkan persamaan energi similiaritas sebagai berikut:

$$x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + f \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Kecepatan pada dinamika fluida dari fluida bernilai nol pada titik stagnasi terendah dari silinder ($x \approx 0$). Diketahui bahwa:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda \theta \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)}{x} = \frac{\lambda \theta}{\cos \theta_s}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)}{x} = \frac{1}{\cos \theta_s}$$

Sehingga persamaan similiaritas yang didapat menjadi:

Persamaan momentum:

$$0 = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\cos \theta_s} + \frac{\lambda \theta}{\cos \theta_s} - K \left[2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 y}{\partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right]$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$0 = f''' + f f'' - (f')^2 + \frac{1}{\cos \theta_s} + \frac{\lambda \theta}{\cos \theta_s} - K [2 f' f''' - f^{(4)} - (f'')^2] + \lambda \theta$$

Persamaan energi:

$$0 = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + f \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Atau dapat ditulis:

$$0 = \frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta'$$

Matlab Code

```

clear all
clc
close all
format long
np = 600;
nr=np+1;
    tetas=pi/6;

%parameter non dimensional
    pr=0.7;      %input('input the Prandtl number
= ');
    lambda=1;
%    K=1;

dely = 0.02;
y(1) = 0.0;
yc(1) = 0.0;
etu(1)=0.0;

%% Variasi Bilangan Prandtl
%    Prandtl(1)=0.7;
%    Prandtl(2)=1;
%    Prandtl(3)=7;
%    Prandtl(4)=100;

%    lambdaa(1)=0.1;
%    lambdaa(2)=0.3;
%    lambdaa(3)=0.5;
%    lambdaa(4)=0.7;

ve(1)=1;
ve(2)=2;
ve(3)=3;
ve(4)=5;

%    sudut(1)=pi/7;

```



```

%   sudut(2)=pi/6;
%   sudut(3)=pi/5;
%   sudut(4)=pi/4;

for j = 2:nr
    y(j) = y(j-1) + dely;
    yc(j) = 0.5*(y(j) + y(j-1));
end
for j=1:np
    etu(j)=y(j);
end

for i=1:4
    %       pr=Prandtl(i);
    %       lambda=lambdaa(i);
    K=ve(i);
    %       tetas=sudut(i);
    k=1;
    stop = 1;
while stop > 0.00001
    A=1;
    F=1;
    G=1;
    H=1;
    for j=1:np
        % Initial Condition
        f(j,1) = (1/4)*(((y(j))^2/y(j+1))*(3-
0.5*((y(j)/y(j+1))^2)));
        u(j,1) = (1/2)*(y(j)/y(j+1))*(3-
((y(j)/y(j+1))^2));
        v(j,1) = (3/2)*(1/y(j+1))*(1-
(y(j)/y(j+1))^2);
        w(j,1) = -3*y(j)/((y(j+1))^3);
        s(j,1) = -(y(j)/y(j+1))^2+1;
        t(j,1) = (-2*(y(j)/y(j+1))*(1/y(j+1)));
    end
    for j = 2:np
        fb(j,k)=0.5*(f(j,k)+f(j-1,k));
        ub(j,k)=0.5*(u(j,k)+u(j-1,k));
    end
end

```

```

vb(j,k)=0.5*(v(j,k)+v(j-1,k));
wb(j,k)=0.5*(w(j,k)+w(j-1,k));
sb(j,k)=0.5*(s(j,k)+s(j-1,k));
tb(j,k)=0.5*(t(j,k)+t(j-1,k));

dervb(j,k) = (v(j,k)-v(j-1,k))/dely;
derwb(j,k) = (w(j,k)-w(j-1,k))/dely;
fvfvb(j,k) = fb(j,k)*vb(j,k);
ftftb(j,k) = fb(j,k)*tb(j,k);
uwuwb(j,k) = ub(j,k)*wb(j,k);
unb(j,k) = (ub(j,k))^2;
vnb(j,k) = (vb(j,k))^2;
dertb(j,k) = (t(j,k)-t(j-1,k))/dely;
ftftb(j,k) = fb(j,k)*tb(j,k);

a1(j,k) = dely*(0.5+K*ub(j,k))-
(K*fb(j,k));
a2(j,k) = a1(j,k)+2*(K*fb(j,k));
a3(j,k) = 0.5*dely*(fb(j,k)-
(K*vb(j,k)));
a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = ((dely/2)*vb(j,k))-
(K*0.5*(w(j,k)-w(j-1,k)));
a6(j,k) = a5(j,k);
a7(j,k) = -dely*(0.5*ub(j,k)-
(K*wb(j,k)));
a8(j,k) = a7(j,k);
a9(j,k) = (lambda/cos(tetas))*(dely/2);
a10(j,k) = a9(j,k);

b1(j,k) = (1/pr)+(dely*fb(j,k)/2);
b2(j,k) = b1(j,k)-(2/pr);
b3(j,k) = dely*tb(j,k)/2;
b4(j,k) = b3(j,k);

r1(j,k) = -f(j,k)+f(j-1,k)+dely*ub(j,k);
r2(j,k) = -u(j,k)+u(j-1,k)+dely*vb(j,k);
r3(j,k) = v(j-1,k)-v(j,k)+dely*wb(j,k);

```

```

r4(j,k) = -s(j,k)+s(j-1,k)+dely*tb(j,k);
r5(j,k) = -(dely*wb(j,k))-
(dely*fvfvb(j,k))+(dely*unb(j,k))-
2*(dely/cos(tetas))-
(lambda*dely*sb(j,k)/(2*cos(tetas)))-
(2*K*dely*uwuwb(j,k))+(K*fb(j,k)*(w(j,k)-w(j-
1,k)))+(K*vnb(j,k)*dely);

```

```

r6(j,k) = -((1/pr)*(t(j,k)-t(j-1,k)))-
(dely*ftftb(j,k));

```

```
end
```

```
% Matrices
```

```

a{2,k}=[0 0 0 1 0 0;-0.5*dely 0 0 0 0 0;-1 -
0.5*dely 0 0 -0.5*dely 0;0 0 -0.5*dely 0 0 -
0.5*dely;a4(2,k) a2(2,k) 0 a5(2,k) a1(2,k) 0; 0
0 b2(2,k) b3(2,k) 0 b1(2,k)];

```

```
for j=3:np
```

```

a{j,k}=[-0.5*dely 0 0 1 0 0; -1 -
0.5*dely 0 0 0 0;0 -1 0 0 -0.5*dely 0;0 0 -1 0 0
-0.5*dely;a8(j,k) a4(j,k) a10(j,k) a5(j,k)
a1(j,k) 0;0 0 0 b3(j,k) 0 b1(j,k)];

```

```

b{j,k}=[0 0 0 -1 0 0; 0 0 0 0 0 0;0
0 0 0 -0.5*dely 0;0 0 0 0 0 -0.5*dely;0 0 0
a6(j,k) a2(j,k) 0;0 0 0 b4(j,k) 0 b2(j,k)];

```

```
end
```

```
for j=2:np
```

```

c{j,k}=[-0.5*dely 0 0 0 0 0;1 -
0.5*dely 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;
a7(j,k) a3(j,k) a9(j,k) 0 0 0;0 0 0 0 0 0];

```

```
end
```

```
alfa{2,k}=a{2,k};
```

```
gamma{2,k}=inv(alfa{2,k})*c{2,k};
```

```
for j=3:np
```

```

alfa{j,k}=a{j,k}-(b{j,k}*gamma{j-
1,k});

```

```
gamma{j,k}=inv(alfa{j,k})*c{j,k};
```

```
end
```

```
for j=2:np
```

```

rr{j,k}=[r1(j,k);r2(j,k);r3(j,k);r4(j,k);r5(j,k)
;r6(j,k)];
    end
    www{2,k}=inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
    for j=3:np
        www{j,k}=inv(alfa{j,k})*(rr{j,k}-
(b{j,k}*www{j-1,k}));
    end
    %% backward sweep
    delf(1,k)=0.0;
    delu(1,k)=0.0;
        delv(1,k)=0.0;
    dels(1,k)=0.0;
        %tambahan
    delu(np,k)=0.0;
    delv(np,k)=0.0;
    dels(np,k)=0.0;

    dell{np,k}=www{np,k};

    for j=np-1:-1:2
        dell{j,k}=www{j,k}-
(gamma{j,k}*dell{j+1,k});
    end
    delv(1,k)=dell{2,k}(1,1);
    delw(1,k)=dell{2,k}(2,1);
    delt(1,k)=dell{2,k}(3,1);
    delf(2,k)=dell{2,k}(4,1);
    delw(2,k)=dell{2,k}(5,1);
    delt(2,k)=dell{2,k}(6,1);
    for j = np:-1:3
        delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
        delv(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
        dels(j-1,k) = dell{j,k}(3,1);
        delf(j,k) = dell{j,k}(4,1);
        delw(j,k) = dell{j,k}(5,1);
        delt(j,k) = dell{j,k}(6,1);
    end

```

```

%% Newton's Method
for j=1:np
    u(j,k+1)=u(j,k)+delu(j,k);
    v(j,k+1)=v(j,k)+delv(j,k);
    s(j,k+1)=s(j,k)+dels(j,k);
    f(j,k+1)=f(j,k)+delf(j,k);
    w(j,k+1)=w(j,k)+delw(j,k);
    t(j,k+1)=t(j,k)+delt(j,k);
end;
stop = abs(delv(1,k));
kmax = k;
k = k + 1;
end
for j = 1:np
    ff(j)=f(j,k);
    uu(j)=u(j,k);
    vv(j)=v(j,k);
    ww(j)=w(j,k);
    ss(j)=s(j,k);
    tt(j)=t(j,k);
end
for j=1:np
    ffb(j)=fb(j,kmax);
    uub(j)=ub(j,kmax);
    vvb(j)=vb(j,kmax);
    ww(b(j)=wb(j,kmax);
    ssb(j)=sb(j,kmax);
    ttb(j)=tb(j,kmax);
    dderwb(j)=derwb(j,kmax);
    ddertb(j) = dertb(j,kmax);
end

if(i==1)
figure(1)
plot(etu,u(:,kmax),'-g')
hold on;
figure(2)
plot(etu,s(:,kmax),'-g')

```

```

hold on;

elseif(i==2)
figure(1)
plot(etu,u(:,kmax),'-b')
hold on;
figure(2)
plot(etu,s(:,kmax),'-b')
hold on;

elseif(i==3)
figure(1)
plot(etu,u(:,kmax),'-.m')
hold on;
figure(2)
plot(etu,s(:,kmax),'-.m')
hold on;

elseif(i==4)
figure(1)
plot(etu,u(:,kmax),'-black')
hold on;
grid on;
title('Profil Kecepatan dengan Parameter
Viskoelastis')
legend('K=1','K=2','K=3','K=5')
xlabel('y')
ylabel('Kecepatan')
figure(2)
plot(etu,s(:,kmax),'-black')
hold on;
grid on;
title('Profil Temperatur dengan Parameter
Viskoelastis')
legend('K=1','K=2','K=3','K=5')
xlabel('y')
ylabel('Temperatur')
end

```

88

end

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini menjelaskan tentang kesimpulan dari pembahasan dan analisis yang telah dilakukan dan saran yang dapat diberikan oleh penulis untuk pembaca yang dapat digunakan untuk pengembangan Tugas Akhir selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dan analisa yang telah dilakukan, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika dari aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastis yang melewati silinder teriris pada kondisi *steady* dan *Incompressible* adalah:

$$\begin{aligned} 0 = f''' + ff'' - f'^2 + \frac{1}{\cos \theta_s} + \frac{\lambda \theta}{\cos \theta_s} \\ - K(2f'f''' - ff^{(4)} - f''^2) \\ 0 = \frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' \end{aligned}$$

2. Hasil simulasi dari parameter konveksi campuran, parameter viskoelastis, bilangan prandtl dan variasi sudut yaitu:
 - a. Dalam variasi parameter konveksi campuran (λ) untuk $\lambda = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ dengan menggunakan nilai $Pr = 1, K = 1$ dan $\theta_s = 30$ menunjukkan bahwa semakin besar nilai λ , profil kecepatan semakin besar dan profil temperatur menurun. Hal tersebut

dikarenakan pada silinder yang panas ($\lambda > 0$) konveksi campuran membantu fluida untuk bergerak lebih cepat.

- b. Dalam variasi parameter viskoelastis (K) untuk $K = 1, 2, 3, 5$ dengan menggunakan nilai $\lambda = 1, Pr = 1$ dan $\theta_s = 30$ menunjukkan bahwa profil kecepatan semakin menurun dan profil temperatur semakin meningkat dengan bertambahnya nilai parameter viskoelastis. Hal tersebut dikarenakan timbulnya gaya gesek antara dinding benda dan fluida yang dapat menimbulkan gesekan, sehingga dapat menghambat aliran fluida dan menyebabkan kecepatan semakin kecil. Gesekan tersebut juga dapat menimbulkan panas sehingga temperatur yang dihasilkan semakin besar.
- c. Dalam variasi bilangan Prandtl (Pr) untuk $Pr = 0.7, 1, 7, 100$ dengan menggunakan nilai $\lambda = 1, K = 1$ dan $\theta_s = 30$ menunjukkan bahwa profil kecepatan dan profil temperatur semakin menurun dengan bertambahnya nilai bilangan Prandtl. Hal tersebut berdasarkan definisi dari bilangan Pr yaitu perbandingan dari nilai viskositas kinematik dengan difusivitas panas, sehingga semakin besar nilai Pr maka kecepatan dan temperatur yang dihasilkan semakin kecil. Dengan bertambahnya nilai Pr maka densitas yang dihasilkan semakin kecil, yang mengakibatkan kecepatan dan temperatur bertambah.
- d. Dalam variasi sudut irisan (θ_s) untuk $\theta_s = \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}$ dengan menggunakan nilai $\lambda = 1, K = 1$ dan $Pr = 1$ menunjukkan bahwa profil kecepatan semakin meningkat dan profil temperatur menurun dengan bertambahnya variasi sudut irisan.

5.2 Saran

Adapun saran yang diberikan dari Tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Pada Tugas akhir ini dilakukan pada aliran tunak (*steady-state*), diharapkan selanjutnya dapat dilakukan pada aliran tak tunak (*unsteady*)
2. Pada Tugas akhir selanjutnya dapat dilakukan pada titik stagnasi $x \neq 0$, sehingga dapat dilihat profil kecepatan dan profil temperatur disekeliling permukaan silinder teriris.

BIODATA PENULIS



Amrina Rosyadah atau yang akrab disapa Nana lahir di Sidoarjo, 30 Agustus 1994. Penulis menempuh pendidikan di SD Ma'arif Al-Fattah Karang Pilang Surabaya kemudian melanjutkan SMP YPM 1 Taman Sidoarjo dan SMA Wachid Hasyim 2 Taman Sidoarjo. Penulis diterima di jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun

2012. Penulis mengambil rumpun mata kuliah Matematika Terapan yaitu Pemodelan Matematika dan simulasi. Penulis sekarang tinggal di Jalan Sawunggaling III RT.17 RW.04 Jemundo Taman Sidoarjo.

Jika ada kritik, saran dan pertanyaan silahkan mengirim ke iamamrina@outlook.com